

### Arbeid og energi. Energibevaring.

- Arbeid =  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
- Kinetisk energi  $E_k = \frac{1}{2} m v^2$
- Effekt = arbeid/tid =  $P = dW/dt$
- Arbeid på legeme øker  $E_k$ :  $dW = dE_k$
- Potensiell energi  $E_p(x, y, z)$   
(Tyngdefelt:  $E_p = mgz$ ; Fjærpotensial:  $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ )
- Konservativt krefter kan avledes fra pot.energi:  
$$\vec{F} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] E_p(x, y, z) = -\vec{\nabla} E_p(x, y, z)$$
  
(Tyngdekraft:  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$ ; Fjærkraft:  $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ )
- $dE_p = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
- Arbeid av konservativ kraft reduserer tilhørende potensiell energi:  $dW = -dE_p$
- Energibevaring i konservativt felt:  
 $d(\frac{1}{2} m v^2 + E_p(x, y, z)) = 0$
- Energibevaring når friksjon:  
 $d(\frac{1}{2} m v^2 + E_p(x, y, z)) = dW_f = \text{friksjonsarbeid} < 0$

### Konstant-akselerasjonslikninger

**Translasjon:**  
(konstant akselerasjon  $a$ )

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

$$s - s_0 = \langle v \rangle t = \frac{1}{2}(v + v_0) t$$

**Rotasjon om fast akse:**  
(konstant vinkelakselerasjon  $\alpha$ )

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

$$\theta - \theta_0 = \langle \omega \rangle t = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0) t$$

### Kollisjoner

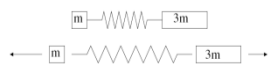
**Vi har sett på:**

- Når ingen ytre krefter (i bevegelsesretning):
  - Bevegelsesmengde (impuls) er bevart
- Når ingen ytre kraftmoment om akse A:
  - Spinn er bevart om akse A
- Elastisk støt:
  - Bevegelsesmengde bevart. Kinetisk energi bevart
- Uelastisk støt:
  - Bevegelsesmengde bevart. Kinetisk energi avtar (varme)

### Flervalgsoppgave

e. To masser,  $m$  og  $3m$ , ligger på et friksjonsfritt bord på hver sin side av en spent fjær. Når fjærlåsen åpnes, skyves de to massene i hver sin retning. Hvordan fordeles den potensielle energien i den spente fjæra på kinetisk energi til de to massene?

A 25 % på  $m$ , 75 % på  $3m$   
B 75 % på  $m$ , 25 % på  $3m$   
 C 10 % på  $m$ , 90 % på  $3m$   
 D 90 % på  $m$ , 10 % på  $3m$   
 E 50 % på  $m$ , 50 % på  $3m$



e. B. Bevaring av bevegelsesmengde gir forholdet mellom hastighetene til de to massene, og dermed forholdet mellom deres kinetiske energi:

$$0 = p_1 + p_3 = mv_1 + 3mv_3$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_3} = -3$$

$$\Rightarrow \frac{mv_1^2/2}{3mv_3^2/2} = 3$$

Følgelig 75% kinetisk energi på  $m$  og 25% på  $3m$ .

### Flervalgsoppgave

i. Tre jenter står på ytterkanten av en karusell som roterer med en vinkelhastighet  $\omega$  og rotasjonen er friksjonsfri. Under rotasjonen går jentene rolig inn mot sentrum av karusellen (se figuren). Under bevegelsen vil det totale spinn  $L$  om karusellens aksling og den totale kinetiske energi  $E$  til karusellen + jentene endre seg slik:

- A)  $L$  øker og  $E$  øker
- B)  $L$  øker og  $E$  uendra
- C)  $L$  uendra og  $E$  øker
- D)  $L$  uendra og  $E$  uendra
- E)  $L$  uendra og  $E$  avtar



Spinn:  $L = I \omega$  **Konstant!**

Personer inn mot sentrum  $\rightarrow I = \sum m_i r_i^2$  avtar  
 $\rightarrow \omega$  må øke!

Kinetisk energi:  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} L \omega = \frac{1}{2} L^2 / I$

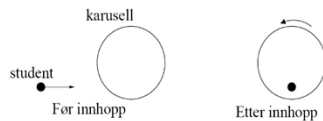
Personer inn mot sentrum  $\rightarrow I$  avtar,  $L$  konstant  
 $\rightarrow E_k$  øker!



### Flervalgsoppgave

b. En student tar fart og hopper på en karusell som dermed begynner å rotere (tinaermet friksjonsfritt) omkring en aksling som står fast i bakken, og som passerer gjennom karusellens sentrum. For systemet karusell + student, hvilke(n) størrelse(r) endrer seg *ikke* fra før til etter studentens innhopp på karusellen? (Her er  $E$  systemets energi,  $p$  systemets bevegelsesmengde og  $L$  systemets spinn mhp. en akse gjennom karusellens sentrum.)

- A) Bare  $L$
- B)  $L$  og  $E$
- C)  $L$  og  $p$
- D)  $L$ ,  $E$  og  $p$
- E) Bare  $p$

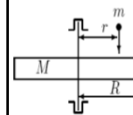


$E$  bevart? Nei: fullstendig uelastisk støt (sitter sammen etter støtet)  
 $p$  bevart? Nei:  $p_{\text{etter}} = 0$  (ingen translasjon). Eller:  $F_{\text{ytre}}$  fra akslingen  
 $L$  bevart? Ja:  $F_{\text{ytre}}$  virker i akslingen, og har derfor ingen moment:  $\tau_{\text{ytre}} = 0$

b. A. Landingen på karusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi  $E$  for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde  $p$  være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en akse gjennom karusellens sentrum, slik at spinn  $L$  er bevart.

### Øving 7.

Oppgave 2. Egenspinn til prosjektil.



Figuren viser ei sirkulær horisontal skive som er opplagret slik at den kan dreie friksjonsfritt om en vertikal akse gjennom midtpunktet. Skiva er uniform, har masse  $M$  og radius  $R$ . Skiva treffes av prosjektil som kommer ovenfra parallelt med akselen. Prosjektilene har - som prosjektil bør ha - et egenspinn  $L_0$  parallelt med hastigheten. De treffer alle skiva i avstanden  $r$  fra akselen og blir sittende i godset, nederste figur illustrerer det. Massen av et prosjektil er  $m$ . Skiva var opprinnelig i ro, og prosjektilene har liten utstrekning i forhold til avstanden  $r$ .



a. Hva blir det totale treghetsmomentet for skiva når  $n$  prosjektil er absorbert i skiva?

b. Hva er skivas vinkelhastighet når  $n$  prosjektil er absorbert?

Apparaturen kan brukes til å måle (gjennomsnittlig) egenspinn til prosjektil.

**Friksjon:**

- **Friksjon:**
  - **Hvilefriksjon**  $F_T = F_f \leq F_{f,max}$  ( $F_f$  "ukjent")  $F_{f,max} = \mu_s F_N$
  - **Glidfriksjon:**  $F_T \geq F_f = \mu_k F_N$

### Oppgave

Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skisser hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.

$F_f$  reduserer  $\omega$        $F_f = 0$        $F_f$  øker  $\omega$

$mg \sin \alpha$  endrer  $v$   
 $F_f$  gir moment til rotasjonen

Y&F Opg. **10.87** • A uniform solid cylinder with mass  $M$  and radius  $2R$  rests on a horizontal tabletop. A string is attached by a yoke to a frictionless axle through the center of the cylinder so that the cylinder can rotate about the axle. The string runs over a disk-shaped pulley with mass  $M$  and radius  $R$  that is mounted on a frictionless axle through its center. A block of mass  $M$  is suspended from the free end of the string (Fig. P10.87). The string doesn't slip over the pulley surface, and the cylinder rolls without slipping on the tabletop. Find the magnitude of the acceleration of the block after the system is released from rest.

Figure **P10.87**

Y&F Opg. Figure **P10.87**

Vi fant med (N2) og (N2-rot):  $a = g/3$

Nå med energi

Eksamen TFY4115 des 2011, opg. 2

Oppgave	Snittresultat	Vektlegging (totalt 30)
2a	58 %	8
2b	90 %	4
2c	79 %	6
2d	58 %	6
2e	34 %	6

**Bowlingkule** (liknende i Ø7, opg. 1)

Skli:  $\omega = 0$   $\omega < v/R$   $\omega = v_{rull}/R$

Om A:  $L_A = r \times m v + I_0 \omega$   
 Ingen krefter har moment  
 $\Rightarrow L_A = \text{konst.} = mrv_0$   
 $L_{\text{start}} = L_{\text{slutt}} \Rightarrow v_{\text{rull}} = v_0 \cdot 5/7$  (\*) -- uten å kjenne  $F_f$ !

Om B:  $L_B = I_0 \omega$   
 $\tau_f = F_f \cdot R$   
 $\Rightarrow L_B$  ikke konst. men  $I_0 d\omega/dt = F_f \cdot R$ , må kjenne  $F_f$

**Bowlingkule**

Skli:  $\omega = 0$   $\omega < v/R$   $\omega = v_{rull}/R$

sluring  
 $F_f = \mu_k mg$   
 (uavhengig  $v$ )

rulling, konst  $v$   
 $F_f = 0$

$F_f = -ma \Rightarrow a = -\mu_k mg/m = -\mu_k g$   
 $F_f \cdot R = I\alpha \Rightarrow a = \mu_k mgR/(2/5)mR^2 = - (5/2) \cdot a/R$

**Øving 7.**

Oppgave 1. Bruk av totalt spinn

Figuren viser ei kule med masse  $m$  og radius  $b$  som ruller nedover et skråplan med helning  $\theta$ .

Vi har i forelesningene funnet akselerasjon  $a$  og friksjonskrafta  $F_f$  for kula ved å bruke Newton 2 langs skråplanet og spinsatsen om *akse gjennom kulas massecenter*. Vi skal nå alternativt finne  $a$  ved å velge referansepunkt A (aksen for moment) på skråplanet ovenfor kula. I forelesningseksempel med slurende/rullende bowlingkule ble det på samme måte brukt referansepunktet i et punkt på bakken. Fordelen er da at vi kan bestemme  $a$  uten å vite friksjonskrafta  $F_f$ . Oppgaven er en god hjelp til den noe vanskelige oppgaven om biljardkule lenger nede.

Vi legger inn et koordinatsystem  $xy$  som vist i figuren med  $x$  parallell med skråplanet og  $z$ -aksen opp av papiplanet. Spinnet om A blir

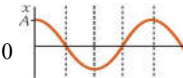
$$\vec{L} = m\vec{R} \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}.$$

Translasjon:	Rotasjon:
Bevegelsesmengde (linear momentum): $p = m v$	Spinn (angular momentum): $L = r \times m v$ $L = I \omega$ Stivt legeme
N2-trans: $F = dp/dt$ "Stivt" legeme (konst. m): $F = m dv/dt = m a$	N2-rot (spinnsatsen): $\tau = dL/dt$ Stivt legeme (konst. I): $\tau = I d\omega/dt = I \alpha$
$F = 0 \Rightarrow p = \text{konstant (N1)}$ "stivt" legeme: $v = \text{konst}$	$\tau = 0 \Rightarrow L = \text{konstant (N1-rot)}$ stivt legeme: $\omega = \text{konst}$

### 6. Mekaniske svingninger. Oppsummering 1

#### 6.1 Udempet harmonisk oscillasjon (SHM)

Kriterium SHM: Krafta som trekker mot likevekt er prop. med avstand  $x$  (eks.  $F = -kx$ )

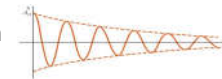


Dette gir fra Newton 2:  $d^2/dt^2 x + \omega_0^2 x = 0$

med løsning:  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

- masse/fjær:  $\omega_0^2 = k/m$
- tyngpendel (matematisk):  $\omega_0^2 = g/l$
- fysisk pendel:  $\omega_0^2 = mgl/I$  (seinere)

#### 6.2 Dempet harmonisk oscillasjon



$d^2/dt^2 x + 2\gamma d/dt x + \omega_0^2 x = 0$

med løsning:  $x(t) = A e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_d t + \phi)$

(svak dempning  $\gamma < \omega_0$ )  $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

## Termodynamikk

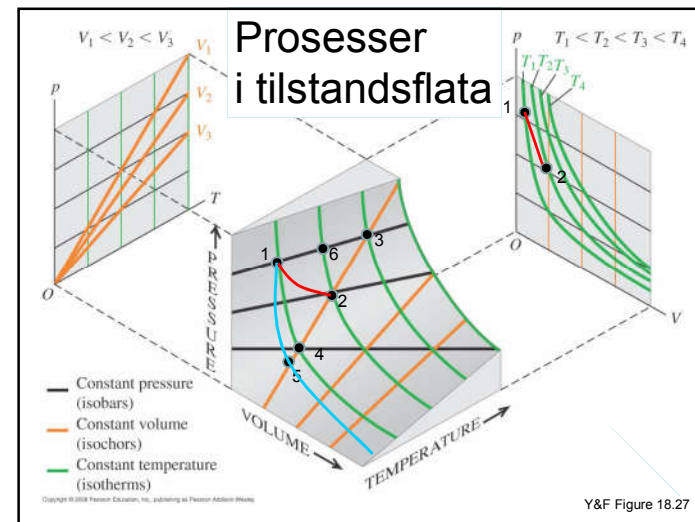
### 1. Hovedsetning = Energibevarelse:

$$\Delta U = Q - W$$

(endring indre energi) = (varme inn) – (arbeid utført)

### 2. Hovedsetning = Mulige prosesser:

Varme kan ikke strømme fra kaldt til varmt legeme



### Termodynamiske kretsprosesser

- Reversible prosesser: Alltid likevekt
- Irreversible prosesser: Ikke likevekt.
- Varmekraftmaskiner
  - Virkningsgrad  $\eta = W/Q_H$ . Carnotmaskin  $\eta_C = 1 - T_L/T_H$
- Kjølemaskiner  $\eta_K = |Q_L / W|$
- Varmepumper  $\eta_V = |Q_H / W|$
- 2. hovedsetning: Det er umulig
  - at varme strømmer fra kaldt til varmt
  - å overføre varme 100% til arbeid
  - å senke entropien i et lukket system
- Entropi er en tilstandsfunksjon, def:  $\Delta S = \int dQ_{rev}/T$

### Entropi

- Entropi er en tilstandsfunksjon, def:  $\Delta S = \int dQ_{rev}/T$
- $S$  øker når varme tilføres
- $S$  «produseres» ved irreversible prosesser
- $S$  øker for universet, følge av:
  2. hovedsetning: Det er umulig
    - at varme strømmer fra kaldt til varmt
    - å overføre varme 100% til arbeid
    - å senke entropien i et lukket system

### Kinetisk teori. Oppsummering

- **Ideell gasslov + trykk pga. kollisjoner (Newton 2) gir:**
- Indre energi** = middelverdi av kinetisk translasjonsenergi:
  - Enatomige molekyler, kun translasjonsenergi:
 
$$U = W_k(\text{trans}) = N \cdot (1/2) m \langle v^2 \rangle = N \cdot 3 \cdot k_B T / 2 \quad \text{Frihetsgrader: } n_f = 3$$
  - Toatomige molekyler, translasjonsenergi + rotasjonsenergi:
 
$$U = W_k(\text{trans}) + W_k(\text{rot}) = N \cdot 5 \cdot k_B T / 2 \quad \text{Frihetsgrader: } n_f = 5$$
- **Varmekapasiteter ideell gass**
  - Konstant volum:  $n C_V = \Delta U / \Delta T$ ,  $C_V = n_f \cdot R / 2$
  - Konstant trykk:  $n C_p = (\Delta U + p \Delta V) / \Delta T$ ,  $C_p = (n_f + 2) \cdot R / 2$
- **Adiabatiske prosesser:**

$$pV^\gamma = \text{konstant under prosessen, med } \gamma = C_p / C_V$$

Spørretime før eksamen -- ?

Dato	Eksamen	Spørretime?
man 7. des		
tir 8. des	TMA4100(nano)	
ons 9. des		
tor 10. des	TMA4120(tk+elsys)	
fre 11. des		
Dato	Eksamen	Spørretime?
man 14. des	TTK4240(tk) / TTT4265(elsys)	
tir 15. des		
ons 16. des	TDT4105 (nano)	
tor 17. des		<b>10.15-12</b>
fre 18. des		
<b>LØR 19. des</b>	<b>TFY4115</b>	

Eksamen TFY4115 des 2014, oppg. 1  
Flervalgs - de dårligst besvarte:

Oppgave	Snittresultat
1-1	29 %
1-4	39 %
1-5	38 %
1-7	27 %
1-9	44 %
1-12	47 %
1-20	37 %
1-22	49 %

Avgitte svar:

Opgg:	1	4	5	7	9	12	20	22
A	13	3	5	43	3	83	34	87
B	58	75	96	15	29	18	67	7
C	15	41	4	52	32	22	27	35
D	50	23	75	26	76	4	13	13
E	61	44	17	12	3	16	22	6
blank	3	14	3	52	57	57	37	52
Sum	200	200	200	200	200	200	200	200
Snittres.	29 %	39 %	38 %	27 %	44 %	47 %	37 %	49 %

**Retts svar**

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2011 (de dårligst besvarte)

a. En kloss med masse  $m$  blir trukket med konstant hastighet av en kraft  $F$  i retning  $\theta$  med horisontalen, som vist på figuren. Den kinetiske friksjonskoeffisienten mellom den ru overflata og klossen er  $\mu_k$ . Størrelsen til friksjonskrafta kan uttrykkes

Svar under eksamen:

A)  $F \cos \theta$   
 B)  $\mu_k F \cos \theta$   
 C)  $\mu_k F \sin \theta$   
 D)  $\mu_k (mg - F \sin \theta)$   
 E) To av svarene over er riktig

39  
8  
11  
63  
58  
1 (ubesvart)

a. E. Ved gliding er  $F_f = \mu_k F_N = \mu_k (mg - F \sin \theta)$ . (Normalkrafta blir altså mindre som følge av at  $F$  har komponent oppover.) Fra  $\sum F_x = 0$  (farta konstant) får vi også  $F_f = F \cos \theta$ , slik at to alternativ er rette.

Snitt: 32 %

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2011

c. For et stivt legeme faller tyngdepunktet og massesenteret sammen dersom

30 A) legemet er i rotasjonslikevekt  
 4 B) legemet er i translasjonslikevekt  
 24 C) legemet er både i rotasjonslikevekt og i translasjonslikevekt  
 67 D) tyngdens akselerasjon er lik over hele legemet  
 3 E) enhver kraft som kan akselerere legemet er konstant  
 52 (ubesvart)

Snitt: 43 %

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2011

e. To enatomige gasser, helium og neon, blir blanda i forholdet 2:1 og er i termisk likevekt ved temperaturen  $T$ . Molar masse til neon er 5x molar masse til helium. Hvis den midlere kinetiske energien per heliumatom er  $U$ , er den midlere kinetiske energien per neonatom lik

80 A)  $U$   
 4 B)  $U/2$   
 9 C)  $2U$   
 34 D)  $5U$   
 13 E)  $U/5$   
 40 (ubesvart)  
 Snitt: 49 %

Kinetisk gassteori

$$U = \langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad \text{lik for begge}$$

( minst  $m$  (helium) har høyest  $\langle v^2 \rangle$  )

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2011

g. Ei massiv kule som holder temperatur  $T$  stråler ut energi med en rate  $P$  (i  $W = \text{watt}$ ). Hvis radius til kula dobles (mens temperaturen holdes konstant) vil  $P$  øke med en faktor:

- 10 A) Forbli uendra
- 7 B) 2
- 129 C) 4
- 16 D) 8
- 3 E) 16
- 15 (ubesvart)

Snitt: 73 %

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2011

h. Hvis lufttrykket er lavere enn trippelpunkt-trykket for et visst stoff, kan dette stoffet eksistere (avhengig av temperaturen)

- 16 A) som væske eller gass, men ikke faststoff
- 29 B) som væske eller faststoff, men ikke som gass
- 106 C) som faststoff eller gass, men ikke som væske
- 3 D) som faststoff, men ikke væske eller gass
- 14 E) som faststoff, væske eller gass
- 12 (ubesvart)

Snitt: 60 %

