

Kap. 8

Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter.

Vi skal se på:

- Newtons 2. lov på ny: Definisjon bevegelsesmengde
- Kollisjoner:
 - Kraftstøt, impuls. Impulsloven
 - Elastisk, uelastisk, fullstendig uelastisk
- Massesenter (tyngdepunkt)
- Rakettilikningen (variabel masse).

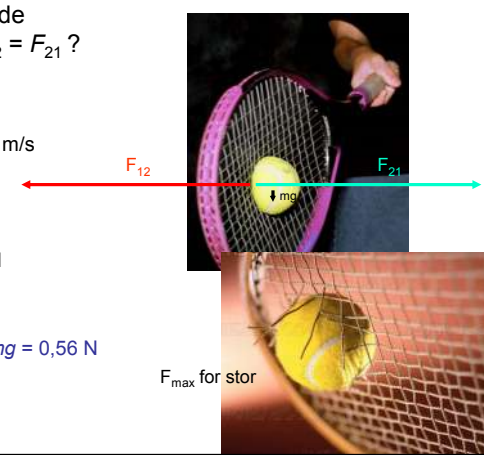
Kollisjoner skjer så raskt at vi kan se bort fra ytre krefter under kollisjonen

Hvor store er de **indre kreftene** $F_{12} = F_{21}$?

$m = 56 \text{ g}$
 $v = 50 \text{ m/s} \rightarrow v = -50 \text{ m/s}$
 anta på $t = 0,005 \text{ s}$

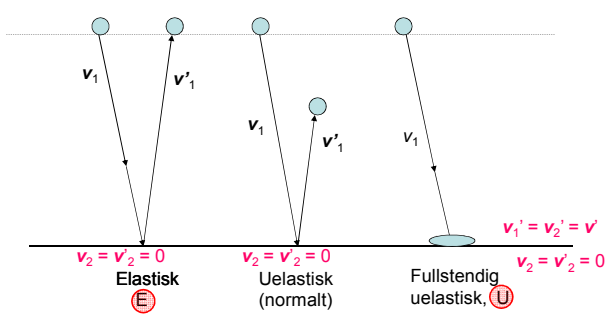
\Rightarrow
 $\langle F \rangle = \Delta p / \Delta t = 1120 \text{ N}$
 $F_{\text{max}} \approx 2000 \text{ N}$

Ytre kraft = tyngde = $mg = 0,56 \text{ N}$
 er forsvinnende liten



Tre klasser kollisjoner

(eksempel: kast mot vegg)



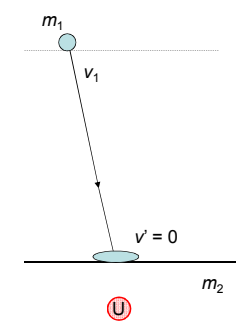
Alle kollisjoner: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

Fullstendig uelastisk med $m_2 \gg m_1$ og $v_2 = 0$ (vegg)

$v' = 0$

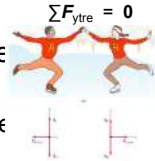
Likevel er p bevart !

$(m_1 v_1 = m_2 v' = \infty \cdot 0)$



Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter.

- Bevegelsesmengde: $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$
- Opprinnelig form Newton 2: $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$
- **Kollisjoner:**
- Kraftstøt = $\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p}$ (impulslov)
- Ingen ytre krefter => $\mathbf{p}_{tot} = \text{konstant}$
 - Kraftstøt motsatt like stort på hvert legeme



• **Tilleggslikninger:**

- E Elastisk støt: *Kinetisk energi bevart*
- U Fullstendig Uelastisk støt: *Felles slutfart* (energi avtar)
- Et «normalt» støt noe mellom E og U (energi avtar).

Så langt om kollisjoner:

- Antar ingen ytre krefter i selve kollisjonen
=> Bevegelsesmengde er bevart:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$$

Tilleggslikning elastisk støt:

- Kinetisk energi bevart:
- $$m_1 \mathbf{v}_1^2 + m_2 \mathbf{v}_2^2 = m_1 \mathbf{v}'_1^2 + m_2 \mathbf{v}'_2^2$$

Generell løsning:

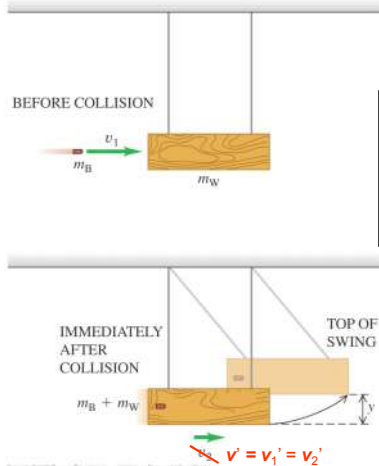
$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_2 + m_1}$$

Tilleggslikning fullstendig uelastisk støt:

- Felles slutfart: $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_2$

Y&F: Ex. 8.8: Fullstendig uelastisk støt "Ballistisk pendel":



To ukjente:
 \mathbf{v}_1 og fellesfarten $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_2$

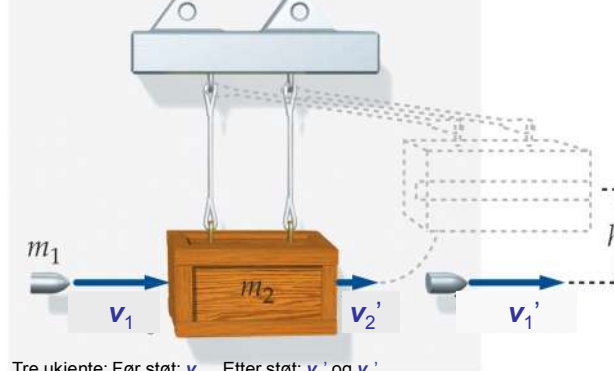
To likninger:
 Bev.mengdebevarelse under støtet:
 $m_B \mathbf{v}_1 + m_W \cdot \mathbf{0} = (m_B + m_W) \mathbf{v}'$

Energibevarelse under oppsvinget:
 $\frac{1}{2} (m_B + m_W) \mathbf{v}'^2 = (m_B + m_W) g y$

IKKE energibevarelse under støtet:
 $\frac{1}{2} (m_B + m_W) \mathbf{v}'^2 < \frac{1}{2} m_B \mathbf{v}_1^2$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_2$$

Delvis uelastisk støt



Tre ukjente: Før støt: \mathbf{v}_1 . Etter støt: \mathbf{v}'_1 og \mathbf{v}'_2

- To likninger: Bev.mengdebevarelse under støtet (1)
 Energibevarelse under oppsvinget (2)

Tilleggsopplysning: F.eks. oppgitt kulas fart etter støtet: $\mathbf{v}'_1 = \frac{1}{2} \mathbf{v}_1$ (3)
 (evt. kunne tap i energi vært oppgitt)

Massesenter

Y&F kap. 8.5
L&L kap. 5.6


- Punktpartikkel:** all masse i ett punkt
- Flerpartikkelsystem:**
Legeme = \sum punktpartikler
(nødvendig mhp. rotasjon, bøyning, deformasjon)
- Massesenter r_{cm} :**


- Topartikkelsyst.
$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$
- N-partikkelsyst.
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (8.29)$$
- Kontinuerlig
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm \quad (8.29B)$$


Massesenter

Y&F kap. 8.5
L&L kap. 5.6

- Topartikkelsystem
$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$
- N-partikkelsystem
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (8.29)$$
- Kontinuerlig
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm \quad (8.29B)$$

3-dim: Integrasjon over volum: $dm = \rho dV$. Eks: 

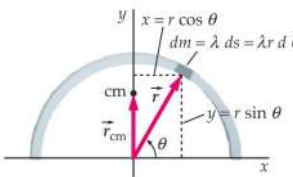
2-dim: Integrasjon over plan: $dm = \sigma dA$. Eks: 

1-dim: Integrasjon langs linje: $dm = \lambda ds$. Eks: 

Eks. Massesenter

Eks. 1. Halvsirkel

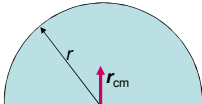
$dm = \lambda ds$
[λ] = kg / m



$y_{cm} = r \frac{2}{\pi} = 0,64 r$

Eks. 2. Halv sirkelplate:

$dm = \sigma dA$
[σ] = kg / m²



$y_{cm} = r \frac{4}{(3\pi)} = 0,42 r$

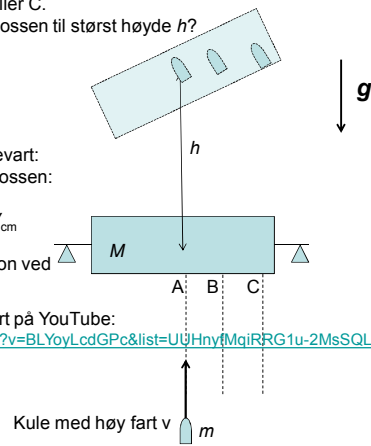
Oppgave:
Ei kule skytes inn i en trekloss som farer opp i lufta (fullst. uelastisk støt). Kula treffer ved A, B eller C. Hvilket treff løfter treklossa til størst høyde h ?

Svar:
Like høyt for alle.
Bevegelsesmengde bevart:
Alltid samme fart for klossen:

$$mv = (M+m)V_{cm}$$

I tillegg kommer rotasjon ved B og C (mest ved C)

Demonstrert og forklart på YouTube:
www.youtube.com/watch?v=BLYoyLcdGPc&list=UUHnyIMqiRRG1u-2MsSQLbXA



Massesenter

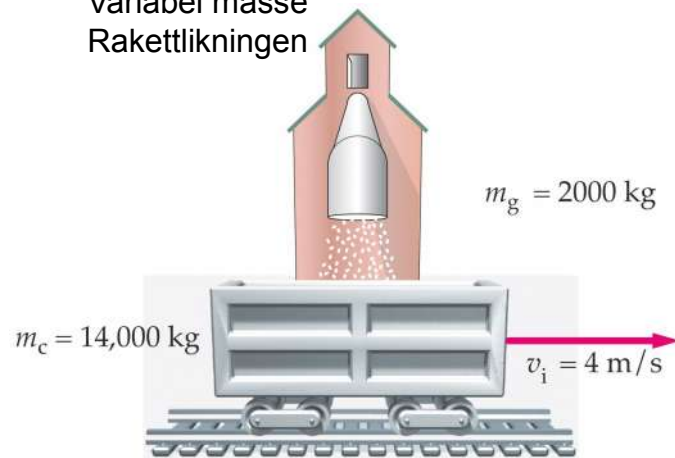
- *Tyngdepunkt = massesenter*
dersom tyngdeaksel. \mathbf{g} er lik over hele legemet
- Newtons lov for massesenter: $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m \mathbf{a}_{\text{cm}}$
- Tyngdens pot. en: $E_p = gM z_{\text{cm}}$

Variabel masse Rakettlikningen

Y&F kap. 8.6
L&L kap. 5.4



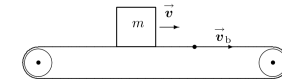
Variabel masse Rakettlikningen



Øving 4:

Oppgave 3. Friksjon, bevegelsesmengde og energi på transportband

En kartong med masse m slippes loddrett ned på et transportband som beveger seg med konstant hastighet \vec{v}_b , se figur. Kartongen får etterhvert samme hastighet som bandet. Den kinematiske friksjonskoeffisienten er μ_k .



- Hvor stort arbeid utfører friksjonskrafta?
- Hvor langt transporteres kartongen i forhold til bakken før den får samme hastighet som bandet?
- Hvor lang tid tar det for kartongen å oppnå samme hastighet som transportbandet?
- Hvor langt har bandet beveget seg på denne tida?
- Hvor mye energi må transportbandet tilføres? (Se bort fra friksjon i bandets drivhjul).

Kap. 8. Oppsummert.

Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter.

- Massesenter $\vec{r}_{cm} = \int \vec{r} dm/M$.
- Bevegelsesmengde: $\vec{p} = m \vec{v}$
- Opprinnelig form Newton 2: $\vec{F} = d\vec{p} / dt$
- Kraftstøt = $\vec{J} = \int \vec{F} dt = \Delta\vec{p}$ (impulsloven=Newton2)
- Ingen ytre krefter => $\vec{p}_{tot} = \text{konstant}$
 - Kraftstøt motsatt like stort på hvert legeme
- **Kollisjoner.**
- **Tilleggslikninger:**
 - **E** Elastisk støt: *Kinetisk energi bevart*
 - **U** Fullstendig Uelastisk støt: *Felles slutfart* (energi avtar)
 - Et «normalt» støt noe mellom E og U (energi avtar).
- Newtons lov for massesenter: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{cm}$
- Tyngdens pot. en: $E_p = gM z_{cm}$
- Ikke konstant masse: Rakettilikningen $m dv/dt = F_Y + u_{ex} dm/dt$

Kap 8. Oppsummert: Massesenter

- **Punktpartikkel:** all masse i ett punkt
- **Flerpartikkelsystem:**
Legeme = \sum punktpartikler
(nødvendig mhp. rotasjon, bøyning, deformasjon)
- **Massesenter \vec{r}_{cm} :**
- Topartikkelsyst. $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$
- N-partikkelsyst. $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ (8.29)
- Kontinuerlig $\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm$ (8.29B)
- **Tyngdepunkt = massesenter** dersom \vec{g} er lik over hele legemet

1-dim: Integrasjon langs linje: $dm = \lambda ds$.

2-dim: Integrasjon over plan: $dm = \sigma dA$.

3-dim: Integrasjon over volum: $dm = \rho dV$.