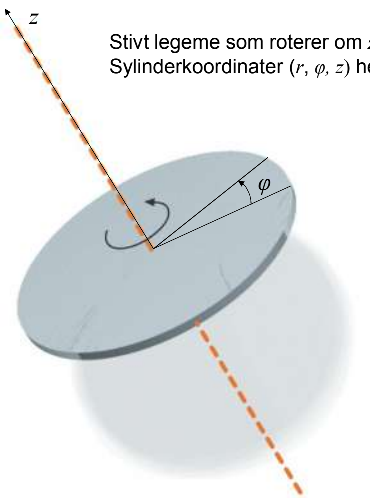
Kap. 9+10
Rotasjon av stive legemer

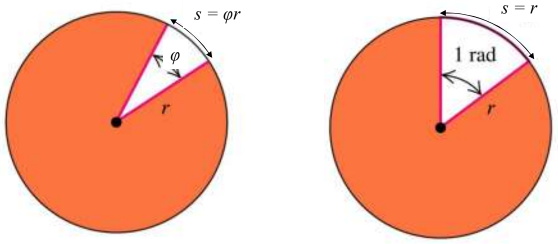
Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rask rekap)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rask rekap)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- Spinnsatsen (Newton 2 for rotasjon):
  $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

Stivt legeme som roterer om z-akse:
Sylinderkoordinater (r, φ, z) hensiktsmessig

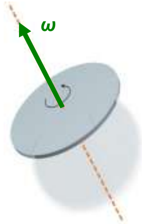


Vinkler måles i radianer:
$\varphi = s/r$



Vinkelhastighet:
$\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$

Viktige størrelser (rotasjon)

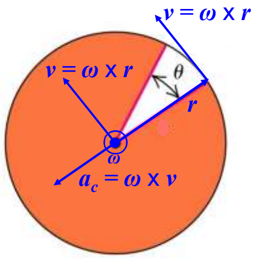


- Vinkelpos. $\varphi = s/r$
- Vinkelhastighet $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = v/r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{\omega}$ langs akseretning
- Periode T = tid/omdr = $1/f$
- Frekvens $f = 1/T$
- Vinkelfrekvens = vinkelhastighet = $\omega = 2\pi f$
- Vinkelaksel. $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}^2t$
- Banefart $v = |v| = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \omega r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
- Baneaksel. $a_t = \alpha r$
- Sentr.aksel. $a_c = v^2/r = \omega v = \omega^2 r$
  - Vektorstørrelse: $\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
  - Total aksel = $\vec{a} = -a_c \hat{r} + a_t \hat{\theta}$

Vektorer:

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

$\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$



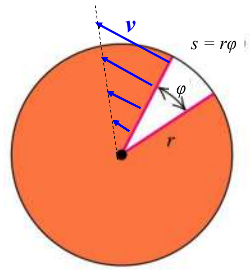
Lik for hele legemet:

Vinkelhastighet $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$

Vinkelaksel. $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$

Øker med radien r :

Banefart $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \omega r$



Tang.aksel. $a_t = \alpha r$

Sentr.aksel. $a_c = \omega^2 r$

- Translasjon: $E_k = ½ m v^2$

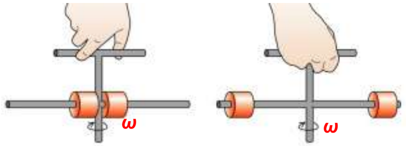
Massens plassering ingen betydning for E_k

Samme $\boldsymbol{v}$, samme E_k

- Rotasjon: $E_k = ½ I \omega^2$

der $I = \int r^2 \, \mathrm{d}m$

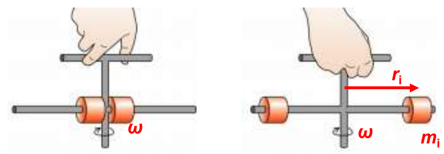
E_k øker med (massens avstand)^2 fra aksen



Samme $\boldsymbol{\omega}$, men ulik E_k

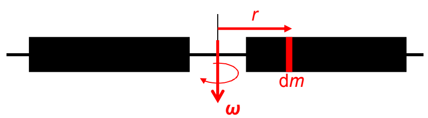
$E_k = ½ I \omega^2$

$I = \Sigma r_i^2 m_i$



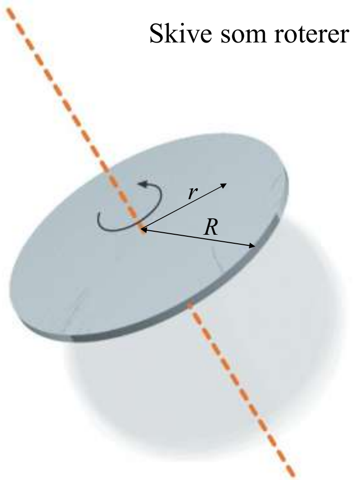
Her må vi integrere:

$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m$



Skive som roterer om symmetriakse

$I = ½\, M\ R^2$



Kap. 9+10. Rotasjon av stive legemer

Vi har sett på:

- Vinkelhastighet $\omega = d\varphi/dt$, vinkelakselerasjon $\alpha = d\omega/dt$
- Banehastighet $v = r\,\omega$
- Sentripetalaks. $a_c = -\,r\,\omega^2 = -\,\omega\, v = -\,v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi $E_k = ½\, I\, \omega^2$
- Treghetsmoment $I = \Sigma\, r_i^2\, m_i = \int r^2\, dm$ (om en gitt akse)
  - Ring om sentrum: $I = M\ R^2$
  - Skive om sentrum: $I = ½\, M\ R^2$
  - Lang, tynn stav om midtpunkt: $I = (1/12)\, M\ L^2$

  (Alle disse gjennom massefellespunktet = cm)

Vektorer: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

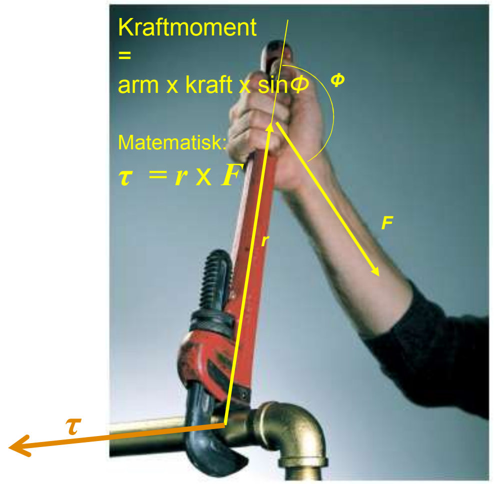
- Steiners sats (parallellakseteoremet):
  Treghetsmoment om annen parallell akse i avstand d:
  $I = I_0 + M\ d^2$
  dvs. I_0 (akse gjennom cm) er alltid **minst** mulige treg.moment

http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_axes_rule

Kap. 9+10 Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- (N2-rot) stive legemer: $\boldsymbol{\tau} = I\, d\omega/dt$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- (N2-rot) alle legemer: $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\omega$, $\boldsymbol{\tau} = I\, d\omega/dt$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…



$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

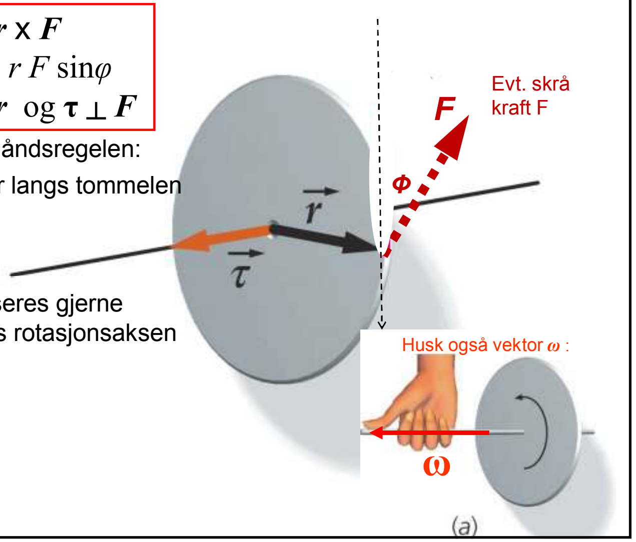
$|\boldsymbol{\tau}| = r\,F\,\sin\varphi$

$\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{F}$

Høyrehåndsregelen:

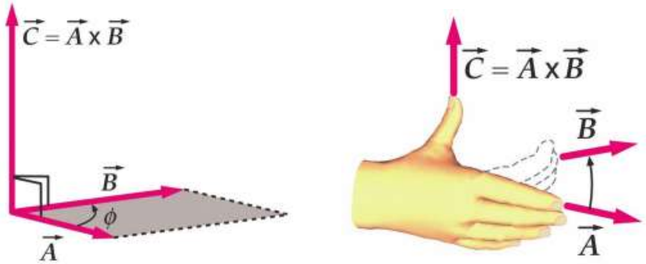
$\boldsymbol{\tau}$ peker langs tommelen

τ plasseres gjerne langs rotasjonsaksen



Vektorkryssprodukt:

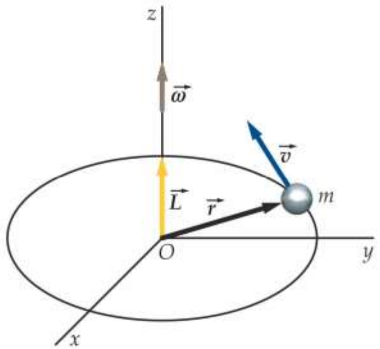
Y&F Kap. 1.10



Bruker sjelden komponentform:

$$\vec{A} \times \vec{B} = [A_x, A_y, A_z] \times [B_x, B_y, B_z] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Translasjon:	Rotasjon:
$\boldsymbol{F} = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = m\,\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{\tau} = I\ \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t = I\,\boldsymbol{\alpha}$



Kap. 9+10 Rotasjon av stive legemer

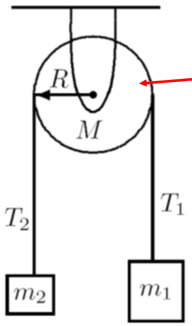
Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- (N2-rot) stive legemer: $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- (N2-rot) alle legemer: $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

onsdag

I dag

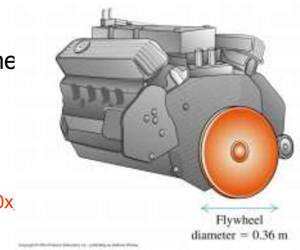
Liknende eksempel: Atwoods (fall)maskin
Øving 5



Trinsa med treghetsmoment *I* skal akselereres i tillegg til akselerasjon av m_2 og m_1

Rotasjonshjul som energilager

- Stålskive 10 cm tykk, 1,0 m diame
  $I = ½ MR^2 = 77$ kg m^2
  Problem:
  Tung! (600 kg) Deformeres!
  I periferien er:
  Banefart $v = \omega r = 1000$ m/s
  Sentripetalaksel $\omega^2 r = 220000$x



- Energi ved 20000 RPM (omdr. per min):
  $E_k = ½ I \omega^2 = 170$ MJ
- Forbrenningsenergi i bensintank på 40 liter, ved utnyttelse 33%: ca 530 MJ

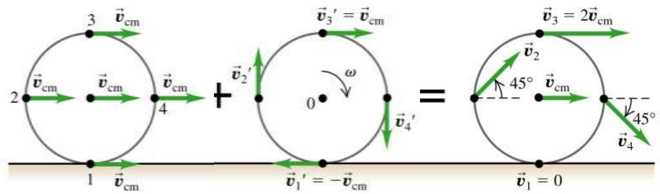
Brukes i motorkjøretøy:
KERS = Kinetic Energy Recovery System:
en.wikipedia.org/wiki/KERS
Ett eksempel: R=12 cm M=5,0 kg f= 64 500 rpm E = 400 kJ
KERS i sykler:
www.sciencefriday.com/video/08/12/2011/boost-your-bike.html

Med KERS kan trolleybusser i Zürch også kjøre uten strøm:

Rulling (uten å glippe) YF 10.3, LL 6.7

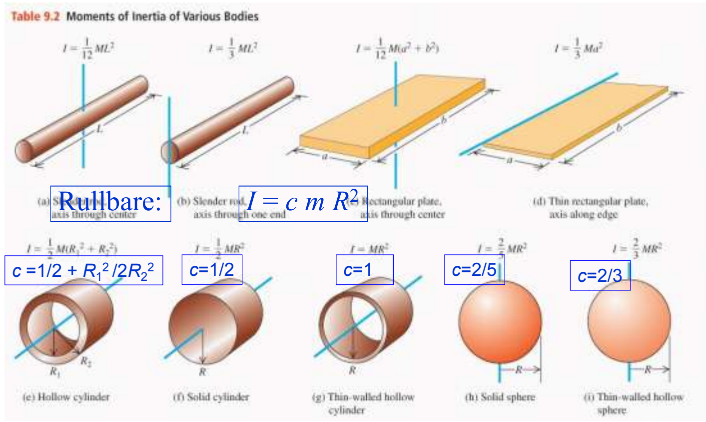
Translasjon + rotasjon = rulling

v ω $\boxed{v_{cm} = \omega r}$



$½\, m\, v^2 \quad + \quad ½\, I\omega^2 \quad = ½\, m\, v^2\, (1+c)$

Treghetsmoment ulike skapninger:



Oppsummering:

Rulling (dvs. uten glipping)

- Statisk friksjon er vesentlig for rulling, men friksjons**arbeidet** er oftest neglisjerbart.
  (Men ved glipp/rutsjing er friksjonen kinetisk og friksjonsarbeidet vesentlig)
- $v = \omega r$
  (dvs. translasjonshastighet = banefart til periferien)
- $E_k = ½\ mv^2 + ½\ I\omega^2$

  Med $I = c\ mr^2$ og $\omega = v/r$:

  $\boxed{E_k = ½\ mv^2 + ½\ c\ mv^2 = ½\ m\ v^2\ (1+c)}$

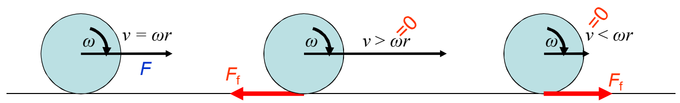
Hvilken ruller fortest:
Massiv kule
massiv sylinder, eller
hul sylinder ?
(Y & F, Ex. 10.5)

$E_k = ½\ m\ v^2\ (1+c)$ = lik alle
Størst v for den med minst c
i tregh.momentet $I = c\ mr^2$

1. **Vannfylt flaske** **c = ?**
2. **Kule** **c = 2/5**
3. **Massiv sylinder,** **c = 1/2**
4. **Kuleskall,** **c = 2/3**
5. **Hul sylinder = ring,** **c = 1**

Uavhengig av størrelsen
(når rulleradius = legemets radius)

Rulle / skli / slure på flatt underlag



F_f =0 hvis konst v

F_f reduserer v (og øker ω)

F_f øker v (og redus. ω)

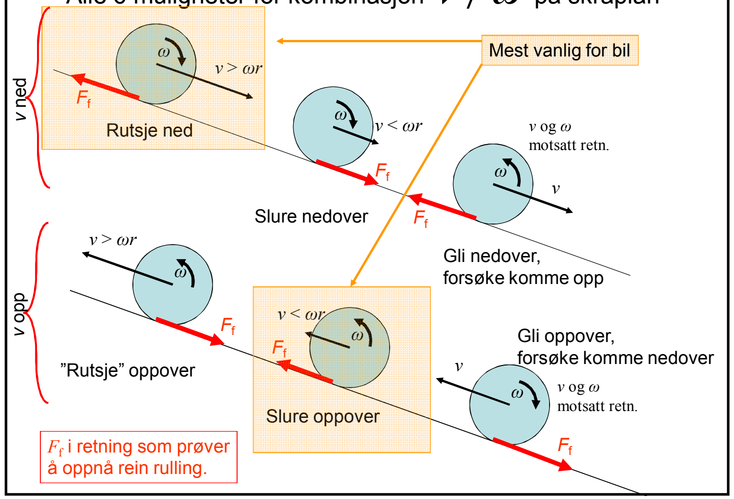
Finne retning for F_f:

1. F_f i retning som prøver å oppnå rein rulling.

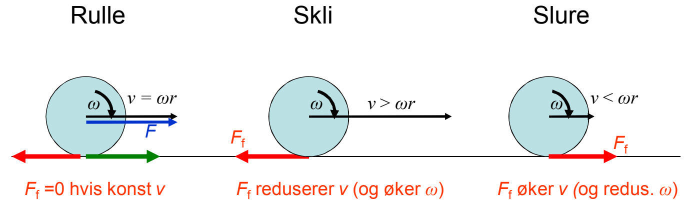
eller

2. Sett minste verdi lik null.

Alle 6 muligheter for kombinasjon $v \neq \omega$ på skråplan



Rulle / skli / slure på flatt underlag



hvis v øker => F_f mot venstre for å øke ω
hvis v minker => F_f mot høyre for å redusere ω
Hvis ytre kraft F årsak til endring i v

hvis ω øker => F_f mot høyre for å øke v (akselererer)
hvis ω minker => F_f mot venstre for å minke v (bremser)
Hvis bilmotor/hjulrotasjon årsak til endring i v

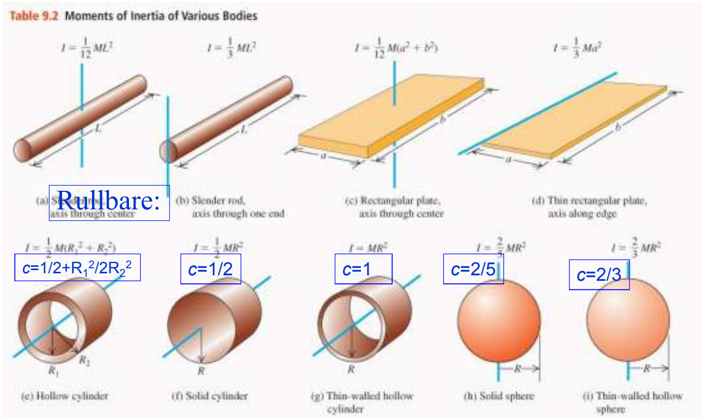
(mer avansert)

Oppsummering: Rulling

- **Rein rulling:**
- $v = \omega r\,; \quad a = \alpha r$
  (dvs. translasjonshastighet = banefart til periferien)
- $E_k = ½\, mv^2 + ½\, I\omega^2 = ½\, m\, v^2\, (1+c)$
  - med $I = c\, mr^2$ og $\omega = v/r$
- **Statisk** friksjon $F_f \leq \mu_s F_N$ vesentlig for rulling og gir vinkelakselerasjon α: $F_f\, r = I\alpha$

- **Spinne/skli/rutsje:**
- $v \neq \omega\, r$. **Kinetisk** friksjon $F_f = \mu_k F_N$ i retning som prøver å oppnå rein rulling
- Kinetisk friksjon gjør et friksjonsarbeid som endrer kinetisk energi

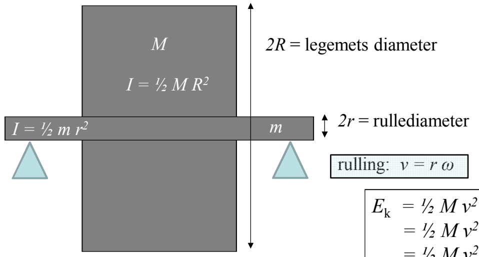
- Rein rulling: ser vi bort fra energitap (ingen rullemotstand).
- Slure/skli : friksjonsarbeidet er vesentlig.



$I = c\, m\, R^2\ ;\quad E_k = ½\, m\, v^2\, (1+c)$

Mulig med $c > 1$?

Rulleradius r ≠ legemets radius R



rulling: $v = r\,\omega$

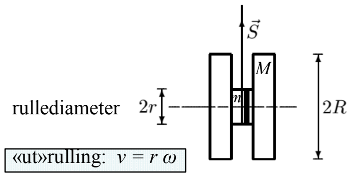
$I \approx \tfrac{1}{2} M R^2$ hvis $m << M$

$$\begin{aligned} E_k &= \tfrac{1}{2} M v^2 + \tfrac{1}{2} I \omega^2 \\ &= \tfrac{1}{2} M v^2 + \tfrac{1}{4} M R^2 (v/r)^2 \\ &= \tfrac{1}{2} M v^2 (1 + \tfrac{1}{2} (R/r)^2) \\ &= \tfrac{1}{2} M v^2 (1 + c) \end{aligned}$$

$c >> 1$

$E_{k,rot} >> E_{k,trans}$

Rulleradius r ≠ legemets radius R
Utrulling av jojo, øving 5



«ut»rulling: $v = r\,\omega$

$I \approx \tfrac{1}{2} M R^2$ hvis $m << M$

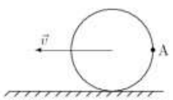
$$\begin{aligned} E_k &= \tfrac{1}{2} M v^2 (1 + \tfrac{1}{2} (R/r)^2) \\ &= \tfrac{1}{2} M v^2 (1 + c) \end{aligned}$$

$c >> 1$

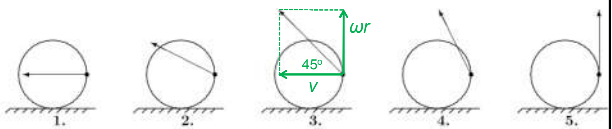
$E_{k,rot} >> E_{k,trans}$

Test

d. Et hjul med radius R ruller på flatt underlag mot venstre med hastighet v. Hvilken av figurene representerer riktig hastighetsvektor for et punkt A på hjulet?



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

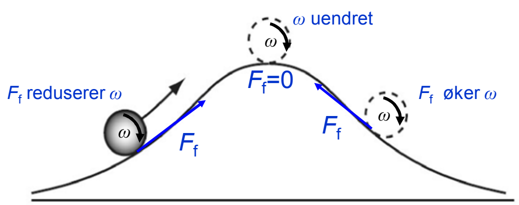


Periferihastighet ωr = rullehastighet v

Eksamensstatistikk:
A) 4
B) 9
C) 67 Riktig
D) 6
E) 83
blank 1
Tot 170

Test

Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.



Ytre kraft ($mg\sin\alpha$) endrer v
F_f gir moment til rotasjonen