Kap. 9+10
Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:
- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$ N2-rotasjon: $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- Spinnsatsen (N2-rotasjon): $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

Denne uka

Spinn
(angular momentum)
Y&F 10.5-7
L&L 5.5, 5.9, 6

1 Spinn for punktlegemer

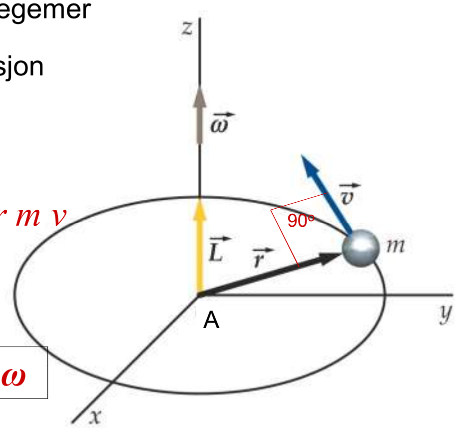
1.1 Spinn ved rotasjon

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{r}$ => $|\boldsymbol{L}| = r\,m\,v$

$\boldsymbol{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$

$$\boxed{\boldsymbol{L} = mr^2\,\boldsymbol{\omega} = I\,\boldsymbol{\omega}}$$



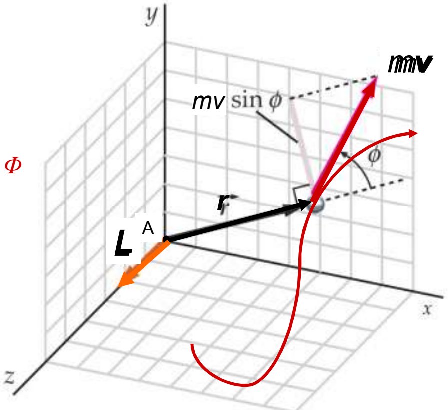
1 Spinn for punktlegemer

1.2 Spinn ved vilkårlig bevegelse

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{v}$ *ikke* $\perp$ $\boldsymbol{r}$

=> $|\boldsymbol{L}| = r\,m\,v \sin \Phi$

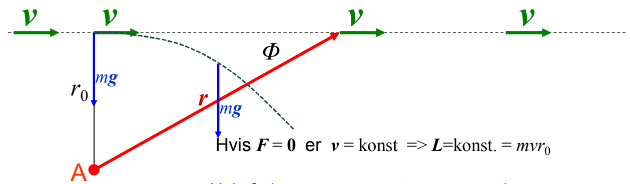


1 Spinn for punktlegemer

1.3 Spinn ved rettlinjet bevegelse

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v}$$

$|\boldsymbol{L}| = r\,m\,v \sin \Phi = r_0\,mv$



Hvis $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ er $\boldsymbol{v}$ = konst => $\boldsymbol{L}$=konst. = mvr_0

Hvis f.eks. $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ er $\tau \neq \boldsymbol{0}$ => $\boldsymbol{L}$ endres

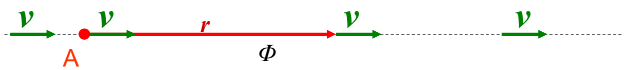
$\boldsymbol{L}$ avhengig av valgt origo A (r_0 og $\boldsymbol{r}$ avhengig av A)

1 Spinn for punktlegemer

1.3 Spinn ved rettlinjet bevegelse

Med partikkelbanen gjennom A (origo), er $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{v}$ (r_0=0) og:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$



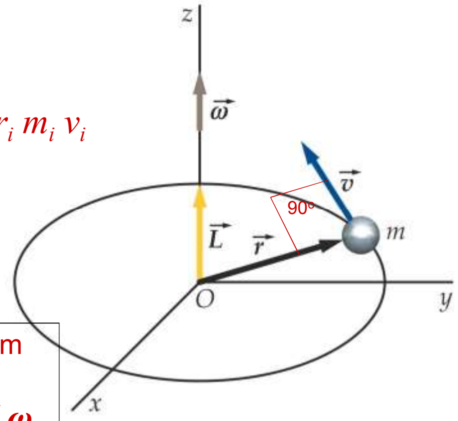
2 Spinn ved rotasjon av stive legemer om sym.akse

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i\,\boldsymbol{v}_i$$

$\boldsymbol{v}_i \perp \boldsymbol{r}$ => $|\boldsymbol{L}_i| = r_i\, m_i\, v_i$

$\boldsymbol{L}_i = m_i r_i^2\,\boldsymbol{\omega}$

alle $\boldsymbol{L}_i \parallel \boldsymbol{\omega}$



Stivt legeme, rot. om symmetriakse:
$\boldsymbol{L} = \Sigma m_i r_i^2\,\boldsymbol{\omega} = I\,\boldsymbol{\omega}$

Rotasjon av stive legemer

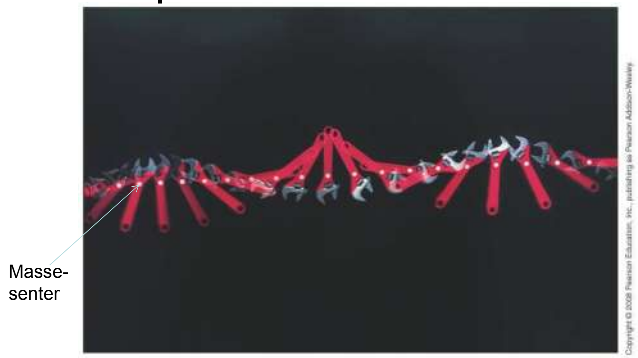
- Treghetsmoment $I = \Sigma\, r_i^2\, m_i$ (om en gitt akse)
- Rotasjonsenergi $E_k = ½\, \Sigma\, m_i\, v_i^2 = ½\, I\, \omega^2$
- Kraftmoment: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
- Spinn (dreieimpuls) $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v}$
- Spinnsatsen (N2-rot): $\boldsymbol{\tau} = d/dt\, \boldsymbol{L}$
- Ingen ytre moment (N1-rot): $\boldsymbol{L}$ = konst.

stive legemer om sym.akse:

$\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$

$\boldsymbol{\tau} = I\,$ d/dt $\boldsymbol{\omega}$ (N2-rot)

Fra kap.8: Friksjonsfritt, horisontalt underlag:



Massesenter har konstant fart, uavhengig av evt. rotasjon

Skal nå studere starten på bevegelsen, i form av en kollisjon (ett skudd med kule).

Y&F Figure 8.29

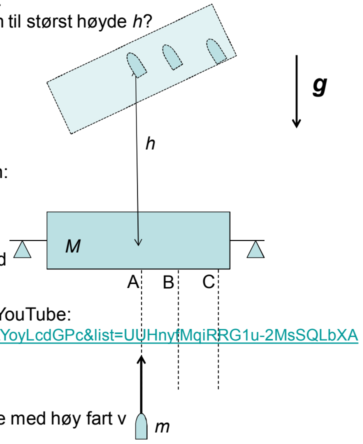
Fra kap.8. Kollisjoner:

Oppgave:
Ei kule skytes inn i en trekloss som farer opp i lufta (fullst. uelastisk støt).
Kula treffer ved A, B eller C.
Hvilket treff løfter treklossen til størst høyde *h*?

Svar:
Like høyt for alle.
Bevegelsesmengde bevart:
Alltid samme fart for klossen:

$mv = (M+m)V_{cm}$

I tillegg kommer rotasjon ved B og C (mest ved C)



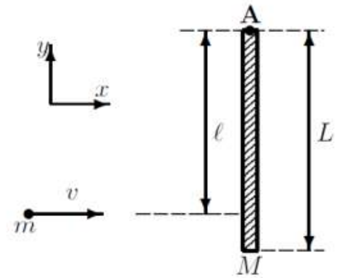
Demonstrert og forklart på YouTube:
www.youtube.com/watch?v=BLYoyLcdGPc&list=UUHnyfMqiRRG1u-2MsSQLbXA

Kule med høy fart v

Øving 5. Oppgave 4:

Kule skytes inn i stav som er hengslet ved A.

Er ytre krefter og ytre kraftmoment lik null?



Translasjon:

Bevegelsesmengde
(linear momentum):
$\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$

N2-trans:
$\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$
"Stivt" legeme (konst. m):
$\boldsymbol{F} = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = m\,\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{F} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{p}$ = konstant (N1)
"stivt" legeme: $\boldsymbol{v}$ = konst

Rotasjon:

Spinn
(angular momentum):
$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$ Stivt legeme om sym.akse

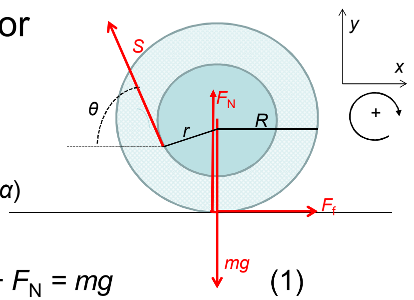
N2-rot (spinnsatsen):
$\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
Stivt legeme om sym.akse (konst. I):
$\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t = I\,\boldsymbol{\alpha}$

$\boldsymbol{\tau} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L}$ = konstant (N1-rot)
stivt legeme om sym.akse: $\boldsymbol{\omega}$ = konst

Snelle med snor

Finn a
når S og θ er gitt

3 ukjente: F_N, F_f, $a(=R\alpha)$



3 likninger:

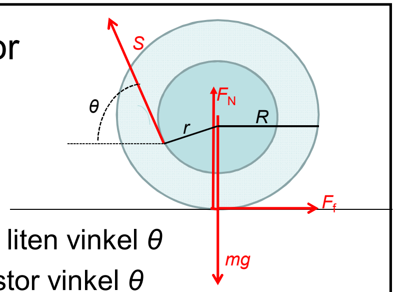
(N1y) $S \sin\theta + F_N = mg$ (1)

(N2x) $F_f - S\cos\theta = ma$ (2)

(N2-rot) $Sr - F_f R = I\alpha = (c \cdot mR^2)\, a/R$ (3)

- Trekkes mot deg ved liten vinkel θ
- Trekkes fra deg ved stor vinkel θ
- I ro ved en viss vinkel θ

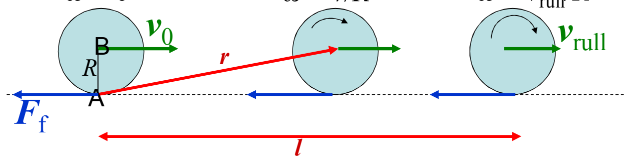
Snelle med snor



- Trekkes mot deg ved liten vinkel θ
- Trekkes fra deg ved stor vinkel θ
- I ro ved $\cos\theta = r/R$

- Stive legemer i ro (statisk likevekt):
  - Ingen translasjon => $\Sigma\, \boldsymbol{F} = 0$
  - Ingen rotasjon => $\Sigma\, \boldsymbol{\tau} = 0$ $(\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})$
    - » om **enhver valgt** akse

Bowlingkule (L&L Eks. 6.15)



Om A: $\boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v} + I_0 \boldsymbol{\omega}$

Ingen krefter har moment

=> L_A = konst. = mrv_0

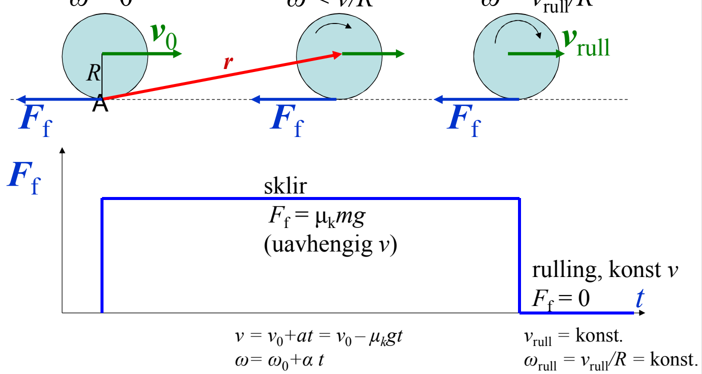
$L_{start} = L_{slutt}$ => $v_{rull} = v_0 \cdot 5/7$ (*) -- uten å kjenne F_f !

Om B: $\boldsymbol{L}_B = I_0 \boldsymbol{\omega}$

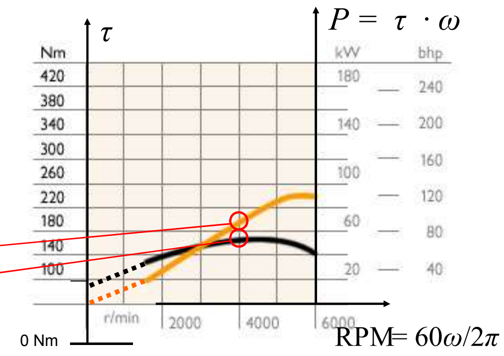
$\tau_B = F_f \cdot R$

=> L_B ikke konst. men $I_0\, d\omega/dt = F_f \cdot R$, må kjenne F_f

Bowlingkule



Effekt = moment · vinkelhastighet



f = 4000 RPM
P = 70 kW
τ = 160 Nm

Stemmer med
$P = \tau \cdot \omega$

Saab 9-3 1.8i 122hk. Effekt og dreiemoment, diagram. Den sorte kurven angir dreiemomentet i newton-meter (Nm), den orange angir effekten i kW eller hestekrefter (bhp).

Konstant-akselerasjonslikninger

Translasjon:
(konstant akselerasjon a)

$v = v_0 + a \cdot t$

$s = s_0 + v_0 \cdot t + ½\, a\, t^2$

$v^2 - v_0^2 = 2as$

$s - s_0 = \langle v \rangle t = ½(v + v_0)\, t$

Rotasjon om fast akse:
(konstant vinkelakselerasjon α)

$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$

$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + ½\, \alpha\, t^2$

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\varphi$

$\varphi - \varphi_0 = \langle \omega \rangle t = ½(\omega + \omega_0)\, t$

Punktpartikkel:

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v}$

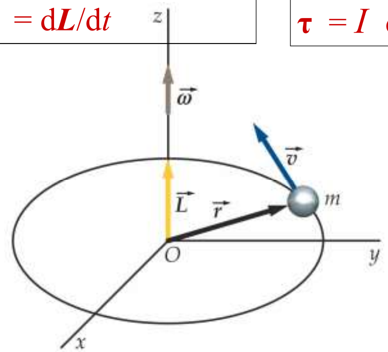
$\quad = mr^2\, \boldsymbol{\omega} = I\, \boldsymbol{\omega}$

$\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$

Stivt legeme, rot. om symmetriakse:

$\boldsymbol{L} = \Sigma m_i r_i^2\, \boldsymbol{\omega} = I\, \boldsymbol{\omega}$

$\boldsymbol{\tau} = I\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$



Kap. 9+10. Rotasjon. Oppsummering.

- Vinkelhastighet $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, vinkelakselerasjon $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
- Sentripetalakselerasjon $a_c = -r\,\omega^2 = -\omega v = -v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi $E_k = ½\, I\, \omega^2$
- Treghetsmoment $I = \Sigma\, r_i^2\, m_i \rightarrow \int r^2\, \mathrm{d}m$ (om en gitt akse)
- Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
- Spinn (dreieimpuls) = $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v}$ (om en gitt akse)
  Stivt legeme om sym. akse: $\boldsymbol{L} = I\, \boldsymbol{\omega}$
- Spinnsatsen: $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ (N2-rot)
  Stivt legeme om sym.akse: $\boldsymbol{\tau} = I\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Friksjon er vesentlig for rulling:
  - rein rulling: statisk friksjon $F_f \le \mu_s F_N$. Friksjons**arbeidet** neglisjerbart
  - slure/gli: kinetisk friksjon $F_f = \mu_k F_N$. Friksjonsarbeidet viktig
- Eksempler: rulling, gyroskop (sykkelhjul), barnekarusell, m.m.

Kap. 9+10. Analogier translasjons- og rotasjonsbevegelser

Størrelse	Trans	Rot (vektor)	Rot (skalar)
Stedkoord.	$\vec r$		θ
Hastighet	$\dot{\vec r} = \vec v$	$\dot{\vec\theta} = \vec\omega$	$\dot\theta = \omega$
Akselerasjon	$\ddot{\vec r} = \vec a$	$\ddot{\vec\theta} = \vec\alpha$	$\ddot\theta = \alpha$
"Kraft"	$\vec F$	$\vec\tau = \vec r \times \vec F$	$\tau = rF\sin\theta$
"Masse"	m		$I = \int r^2 \mathrm{d}m$
"Bev.mengde"	$\vec p = m\,\dot{\vec r}$	$\vec L = \vec r \times \vec p = I\,\vec\omega$	$L = rp\sin\theta = I\,\omega$
Kin. energi	$E_k = \frac{1}{2} m\, v^2$		$E_k = \frac{1}{2} I\, \omega^2$
Arbeid	$\mathrm{d}W = \vec F \cdot \mathrm{d}\vec s$	$\mathrm{d}W = \vec\tau \cdot \mathrm{d}\vec\theta$	$\mathrm{d}W = \tau\, \mathrm{d}\theta$
Effekt	$P = \vec F \cdot \vec v$	$P = \vec\tau \cdot \vec\omega$	$P = \tau\,\omega$
Newton 2	$\vec F = \dot{\vec p} = m\,\ddot{\vec r}$	$\vec\tau = \dot{\vec L} = I\,\ddot{\vec\theta}$	$\tau = I\,\ddot\theta$
Newton 1	$\vec F = \vec 0 \Rightarrow \vec v =$ konst	$\vec\tau = \vec 0 \Rightarrow \vec\omega =$ konst	

Treghetsmoment (om en gitt akse):

$$I = \Sigma\, r_i^2\, m_i \;\rightarrow \int r^2\, dm$$

Alle I_0 om massesentrum (cm):

- Ring om sentrum: $I_0 = M R^2$
- Ring om diameter: $I_0 = ½ M R^2$
- Sylinder eller skive om sentrum: $I_0 = ½ M R^2$
- Kule om diameter: $I_0 = (2/5) M R^2$
- Kuleskall om diameter: $I_0 = (2/3) M R^2$

  Legemer som kan rulle: $I_0 = c\, MR^2$ (c=1, ½, 2/5 etc.)
- Lang, tynn stav om midtpunkt: $I_0 = (1/12)\, M L^2$
- Rektangulær plate om midtpunkt: $I_0 = (1/12)\, M (a^2 + b^2)$

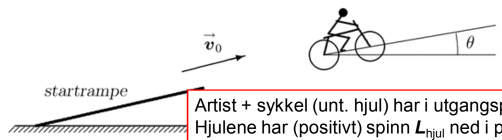
Om annen parallell akse i avstand d (Steiners sats):

$I = I_0 + M\ d^2$

Se også Table 9.2 i Young & Freedman.

Fra en eksamensoppgave annet fysikkemne:

e) En sirkusartist på motorsykkel kjører med hastighet v_0=85 km/time opp en startrampe for deretter å foreta et langt hopp. Vinkelen målt fra horisontallinja til ei linje gjennom navene til motorsykkelens to hjul settes lik θ.



Artist + sykkel (unt. hjul) har i utgangspunkt spinn $\boldsymbol{L}_{artist}$ = **0**
Hjulene har (positivt) spinn $\boldsymbol{L}_{hjul}$ ned i papirplanet.
$\boldsymbol{L}_{tot} = \boldsymbol{L}_{hjul} + \boldsymbol{L}_{artist}$ er bevart.
a) Dersom $\boldsymbol{L}_{hjul}$ **øker** må $\boldsymbol{L}_{artist}$ peke opp av planet (steiler)
b) Dersom $\boldsymbol{L}_{hjul}$ **avtar** må $\boldsymbol{L}_{artist}$ peke ned i planet (stuper)

a) Hvordan vil vinkelen θ endre seg hvis motorsyklisten i svevet gir mer gass (øker turtallet til motoren)? Begrunn svaret. Du kan se bort fra luftmotstanden.

b) Hvordan vil vinkelen θ endre seg hvis motorsyklisten i svevet i stedet trykker inn handbremsa på framhjulet? Begrunn svaret. Du kan se bort fra luftmotstanden.

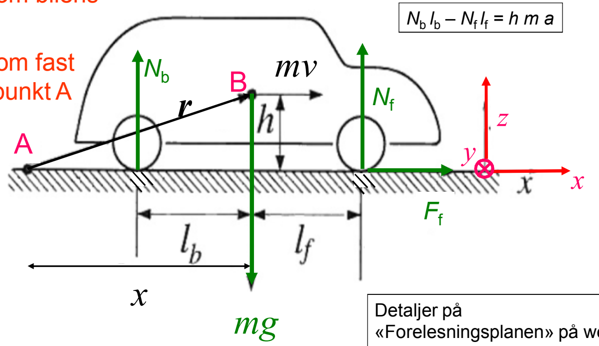
Spinn for akselererende/bremsende bil

(H&S kap. 4.7.2 og 5.4.4)

Spinn om bilens c.m. B

Spinn om fast bakkepunkt A

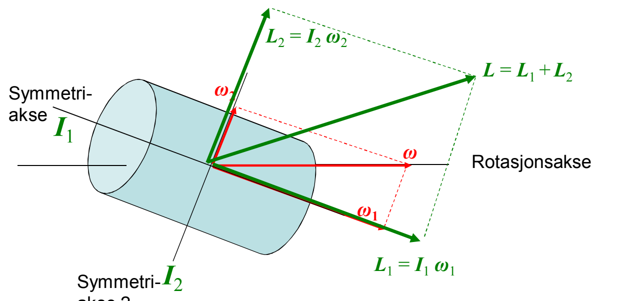
$N_b l_b - N_f l_f = h\, m\, a$



Detaljer på «Forelesningsplanen» på web
Eks: Bil

Rotasjon om akse ikke-parallell med symmetriakse

(Ikke pensum)



Anta: $I_2 > I_1$
Da er **ikke** $\boldsymbol{L}$ parallell med $\boldsymbol{\omega}$
$\boldsymbol{L}$ endrer altså retning under rotasjonen