TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)

Løsningsforslag for "Matteøving"1 - NANO

Oppgave 1.

Vi skal regne ut de fire andrederiverte av funksjonen $f(x,y) = \sin(x+y^2)$ og sjekke at de to "kryssleddene" er like:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y^2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos(x+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x+y^2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\cos(x+y^2) - 4y^2\sin(x+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(x+y^2)\right) = -2y\sin(x+y^2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y\cos(x+y^2)\right) = -2y\sin(x+y^2).$$

Vi ser at rekkefølgen ikke spiller noen rolle, dvs vi kan derivere først mhp y og deretter mhp x, eller omvendt, svaret blir det samme.

Oppgave 2.

Vi har et terreng omkring en fjelltopp som kan beskrives med høydefunksjonen

$$h(x,y) = h_0 \frac{e^{-x^2/a^2}}{1+y^2/a^2}$$

der h_0 er en konstant og lik høyden på fjelltoppen, mens a også er en konstant og angir en "karakteristisk lengde" for hvor raskt høyden endrer seg i dette terrenget.

a Vi ser vel uten videre at maksimal høyde er i origo, $h(0,0) = h_0$.

b Vi skal finne ut i hvilken retning terrenget er brattest i posisjonen (a,a). Da må vi regne ut gradienten til h i (a,a) siden gradienten nettopp peker i den retningen h øker raskest. Vi trenger da de partiellderiverte av h mhp x og y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \left(-\frac{2x}{a^2}\right) h_0 \frac{e^{-x^2/a^2}}{1+y^2/a^2} \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= \left(-\frac{2y}{a^2}\right) h_0 \frac{e^{-x^2/a^2}}{(1+y^2/a^2)^2}
\end{aligned}$$

Vi setter inn $(x,y) = (a,a)$ og finner

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} h(a,a) &= \hat{x}\frac{\partial h}{\partial x}(a,a) + \hat{y}\frac{\partial h}{\partial y}(a,a) \\
&= \left(-\frac{2}{a}\right) h_0 \frac{e^{-1}}{2}\hat{x} + \left(-\frac{2}{a}\right) h_0 \frac{e^{-1}}{4}\hat{y} \\
&= -\frac{h_0}{2ea}\left(2\hat{x} + \hat{y}\right)
\end{aligned}$$

Det betyr at i posisjonen (a,a) peker $-\vec{\nabla} h$ i en retning $[2,1]$ gitt ved vinkelen

$$\tan\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\frac{1}{2} \simeq 27^\circ$$

i forhold til x-aksen (som er f.eks. østover). Terrenget *avtar* raskest i denne retningen og *stiger* raskest i den motsatte retningen.

c Vi skal vil slutt påvise at origo virkelig er en fjelltopp. Da må vi ha $\vec{\nabla} h = 0$ i origo, samt at de andrederiverte må være negative.

La oss ikke skrive alt dette ut i detalj, men derimot se litt nærmere på det vi har. Vi ser at x-komponenten av $\vec{\nabla} h$ er proporsjonal med x, og dermed lik null i $x = 0$. Tilsvarende er y-komponenten av $\vec{\nabla} h$ proporsjonal med y, og dermed lik null i $y = 0$. Altså er origo et stasjonært punkt. Videre ser vi at de andrederiverte mhp x og y, dvs det vi kalte "kryssleddene", begge vil bli proporsjonale med faktoren xy, slik at disse er lik null i origo.

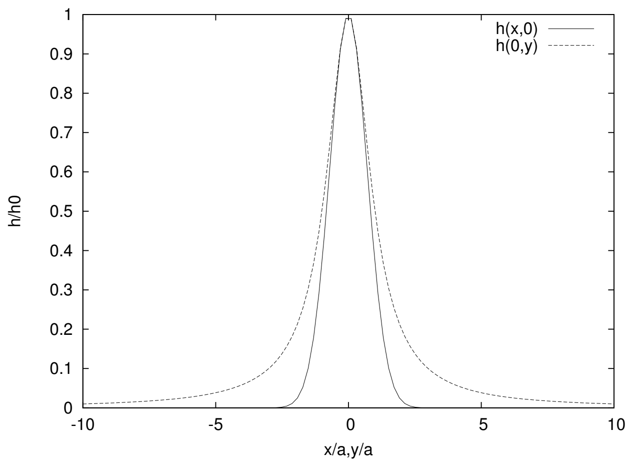
Vi står igjen med $\partial^2 h/\partial x^2$ og $\partial^2 h/\partial y^2$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \left(-\frac{2}{a^2}\right) h + x^2 \cdot (\dots) \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \left(-\frac{2}{a^2}\right) \frac{h}{(1+y^2/a^2)} + y^2 \cdot (\dots)$$

Følgelig har vi negativ krumning i origo, og det er et maksimumspunkt.

Figuren viser to "snitt" gjennom fjelltoppen, hhv xh-planet (heltrukken linje) og yh-planet (stiplet linje). Legg merke til at eksponentialfunksjonen går raskest mot null.



Oppgave 3.

Newtons 2. lov gir diffligningen som skal løses:

$$ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -bv + mg\sin\theta = -b\left(v - \frac{mg\sin\theta}{b}\right)$$

Vi ganger med $\mathrm{d}t/m(v - mg\sin\theta/b)$ på begge sider:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v - mg\sin\theta/b} = -\frac{b}{m}\mathrm{d}t$$

Integrasjon fra $t = 0$ til t gir

$$\ln\left[(v(t) - mg\sin\theta/b\right] - \ln\left[v(0) - mg\sin\theta/b\right]) = -\frac{bt}{m}$$

Eksponentiering på begge sider gir så, med $v(0) = 0$,

$$\frac{v(t) - mg\sin\theta/b}{-mg\sin\theta/b} = e^{-t/\tau}$$

der vi har innført "tidskonstanten" $\tau \equiv m/b$. Ordner vi litt finner vi endelig

$$v(t) = \tau g\sin\theta\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Merk at vi oppnår en maksimal hastighet etter "lang tid", $t \gg \tau$. Da er friksjonskraften bv og tyngdekraftens komponent langs skråplanet $mg\sin\theta$ like store (men motsatt rettet) slik at total kraft er null:

$$v_{\max} = \tau g\sin\theta = \frac{mg\sin\theta}{b}.$$

Posisjonen (målt langs skråplanet) $x(t)$ finner vi ved å integrere hastigheten (med $x(0) = 0$):

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v(t)\mathrm{d}t \\ &= \tau gt\sin\theta - \tau^2 g\sin\theta\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \end{aligned}$$

Oppgave 4.

Arealet mellom kurvene $x = 0$, $x = \pi/4$, $y = \sin x$ og $y = \cos x$ er:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x \int_{\sin x}^{\cos x} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x\,(\cos x - \sin x) \\ &= \Big|_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

Oppgave 5.

Arealet mellom de to parablene $x^2 - 4$ og $-x^2 + 4$ skal bestemmes. Vi innser at vi må integrere fra $x = -2$ til $x = 2$:

$$A = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_{x^2-4}^{-x^2+4} \mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x(8 - 2x^2) = \left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \frac{64}{3}.$$

Til slutt skal vi finne volumet av objektet vi får når dette dreies omkring y-aksen. Hvis vi tenker oss en tynn søyle i posisjon x, med bredde $\mathrm{d}x$ og høyde $8 - 2x^2$, og roterer denne en hel runde rundt y-aksen, skulle vi få et tynt sylinderskall med volum

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot (8 - 2x^2) \cdot 2\pi x.$$

Dette må integreres fra $x = 0$ til $x = 2$ for å få med hele volumet:

$$V = \int \mathrm{d}V = \int_0^2 \mathrm{d}x \cdot (8 - 2x^2) \cdot 2\pi x = 2\pi \left[4x^2 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^2 = 2\pi[16 - 8] = 16\pi.$$

Oppgave 6.

Vi skal bestemme Taylorrekkene til noen kjente funksjoner:

a

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin 0 + x\cos 0 - \frac{1}{2}x^2 \sin 0 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 \cos 0 + \ldots \\
&= x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos 0 - x\sin 0 - \frac{1}{2}x^2 \cos 0 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 \sin 0 + \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + x\alpha + \frac{1}{2}x^2\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{2\cdot 3}x^3\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\
\text{med } \binom{\alpha}{n} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}
\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \ln 1 + x\frac{1}{1+0} - \frac{1}{2}x^2\frac{1}{(1+0)^2} + \frac{2}{2\cdot 3}x^3\frac{1}{(1+0)^3} + \ldots \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}
\end{aligned}$$

Oppgave 7.

Vi skal bestemme Ω til andre orden i den lille parameteren ε/Ω_0:

$$\Omega = -\varepsilon + \sqrt{\Omega_0^2 + \varepsilon^2} = -\varepsilon + \Omega_0\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2}}$$

Vi kan nå bruke Taylorrekke **c** ovenfor, med $\alpha = 1/2$ og $x = \varepsilon^2/\Omega_0^2 \ll 1$, og skrive

$$\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2}$$

Dermed:

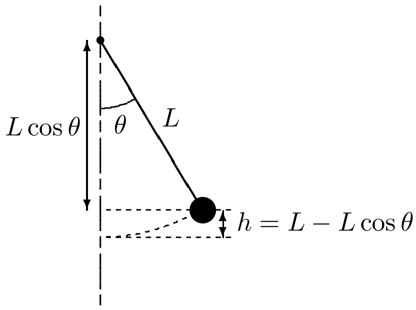
$$\begin{aligned}\Omega &\approx -\varepsilon + \Omega_0 + \Omega_0 \cdot \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2} \\ &= \Omega_0 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2\Omega_0} \\ &= \Omega_0\left(1 - \frac{\varepsilon}{\Omega_0} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2}\right)\end{aligned}$$

Med oppgitte tall har vi:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{2\pi}{T_\mathrm{d}} = \frac{2\pi}{26,8 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 6,5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1} \\ \Omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9,81}{25,0}}\,\mathrm{s}^{-1} = 0,626\,\mathrm{s}^{-1} \\ \frac{\epsilon}{\Omega_0} &= 1,0 \cdot 10^{-4} \ll 1 \quad \text{(nesten ubetydelig)} \\ \frac{\epsilon^2}{\Omega_0^2} &= 1,0 \cdot 10^{-8} \quad \text{(helt uten betydning)}\end{aligned}$$

Neste ledd i summen vil være "av orden" $\varepsilon^3/\Omega_0^3 \approx 1,0 \cdot 10^{-12}$.

Oppgave 8.



Kulas høyde over likevektspunktet er

$$h = L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta).$$

For små θ kan vi bruke Taylorrekke **b** ovenfor: $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$. Dermed er

$$E_\mathrm{p} = mgh = mgL(1 - \cos\theta) \approx mgL\left(1 - (1 - \frac{1}{2}\theta^2)\right) = \frac{1}{2}mgL\theta^2;$$

altså så lenge $\theta \ll 1$.

J. A. Støvneng og $\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 18. sep. 15.