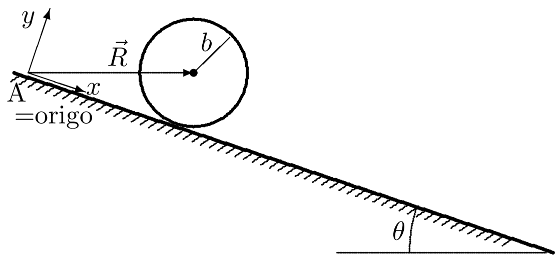
TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
Øving 7

Veiledning: Man 17. okt. 14:15-16 og ons 19. okt. 10:15-12. Gruppeinndelingen finner du på emnets nettside.
Innlevering: Torsdag 20. okt. kl. 12:30 Lever øvinger i bokser utenfor R1.

Oppgave 1. Bruk av totalt spinn

Figuren viser ei kule med masse m og radius b som ruller nedover et skråplan med helning θ.
Tradisjonelt finner vi akselerasjonen a og friksjonskrafta F_f for kula ved å bruke Newton 2 langs skråplanet og spinnsatsen om *akse gjennom kulas massesenter*. Vi skal nå alternativt finne a ved å velge referansepunkt A (aksen for moment) på skråplanet ovenfor kula. I forelesningseksempel med slurende/rullende bowlingkule ble det på samme måte brukt referansepunktet i et punkt på bakken. Fordelen er da at vi kan bestemme a uten å vite friksjonskrafta F_f.



Vi legger inn et koordinatsystem xyz som vist i figuren med x parallell med skråplanet og z-aksen opp av papirplanet. Spinnet om A blir

$$\vec{L} \;=\; m\vec{R}\times\vec{V} + I_0\,\vec{\omega}.$$

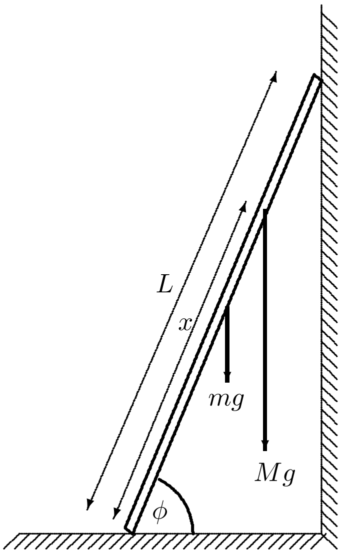
Her er $\vec{R}$ massesenterets posisjon, $\vec{V}$ massesenterets hastighet, $I_0 = (2/5)mb^2$ kulas treghetsmoment om akse gjennom massesenteret og $\vec{\omega}$ er den roterende kulas vinkelhastighet.

a. Tegn inn alle krefter på kula og finn *netto*-kraft $\vec{F}$ og *netto*-kraftmoment $\vec{\tau}$ på kula. Uttrykk og retning.

b. Hva er retningen for $\vec{R}\times\vec{V}$ og for $\vec{\omega}$? Finn spinnet $\vec{L}$, uttrykt med bl.a. V.

c. Bruk alt dette til å bestemme akselerasjonen a til kulas massesenter nedover langs skråplanet.

Oppgave 2. Statikk.



Figuren viser en stige satt opp mot en vegg. Stigen har massen m og lengden L, med tyngdepunktet midt på. Stigen settes opp med en vinkel ϕ relativt horisontalplanet. En maler, med masse M, klatrer opp i stigen og står på et trinn i avstand x fra stigens nedre ende. I realiteten vil både friksjon mellom stige og underlag, og mellom stige og vegg, bidra til å stabilisere situasjonen. Vi skal her neglisjere hjelpen fra friksjon mot veggen, og regne som om det eneste som hindrer kollaps, er den statiske friksjonskoeffisienten μ_s mellom stige og gulv. Her er det likevel mye som kan variere: μ_s, x og ϕ. Hva må til for at stigen blir stående i ro?

a. Skriv ned likevektsbetingelsene for stige pluss maler, og vis at minimumskravet for stabil likevekt er

$$\tan\phi \;\geq\; \frac{\dfrac{x}{L}M + \dfrac{1}{2}m}{\mu_s(M+m)}.$$

b. La $m = 12{,}0\,\text{kg}$ og $M = 80\,\text{kg}$. Hva er minimumsvinkelen som tillater maleren å gå helt til topps i stigen (som vi definerer er $x/L = 9/10$), når μ_s har henholdsvis verdiene 0,50, 0,40 og 0,30?

Oppgave 3. Enkelt og grunnleggende om svingefunksjonen.

Et legeme svinger med utslag $x(t) = x_0\cdot\cos(\omega t+\theta)$ der $x_0 = 0{,}50\,\text{m}$, $\omega = \dfrac{3\pi}{4}\,\text{s}^{-1}$, $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$, og t er tida i sekunder.

a. Finn perioden T og frekvensen f for oscillatoren (tallverdier).

b. Finn uttrykk for hastigheten $v(t) = \dot{x}(t)$ og akselerasjonen $a(t) = \ddot{x}(t)$. (Ikke sett inn tallverdier)

c. Tegn en graf med den relative tida t/T langs horisontal akse og posisjonen $x(t)$ langs vertikal akse. Marker også langs den horisontale aksen verdier for ωt. (Dvs. to skalaer på samme aksen).
Tegn også tilsvarende grafer for $v(t)$ og $a(t)$, tegn alle tre grafene under hverandre.

d. Hva er den maksimale hastigheten $v_{\max}$ og ved hvilke tider finner vi denne?

Oppgave 4. **Svingetid som funksjon av amplituden. Numerisk løsning.**

Pendelbaserte stueur må svinge med konstant amplitude for å gå riktig. Eller, hvor viktig er egentlig dette? For å svare må vi finne den analytiske løsningen av svingelikningen (1) og sammenlikne med den lineariserte likn. (2). Likn. (1) gir at svingetida er avhengig av amplituden θ_0, men hvor mye? Istedenfor å kaste oss ut i det vanskelige arbeidet å løse likning (1) analytisk, velger vi en numerisk løsning. Matlab-koden er oppgitt.

Likningen for en tyngdependel med dempning er som følger:

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \tag{1}$$

med $\omega_0^2 = g/\ell$ der ℓ er pendelens lengde. Hvis vi lineariserer $\sin\theta \approx \theta$ for små vinkler, får vi en standard dempet svingelikning

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0. \tag{2}$$

Vi velger i denne øvingen null dempning, $\gamma = 0$ (i neste øving skal dere studere en dempet svingning).

Den lineariserte likningen (2) med $\gamma = 0$ har den kjente analytiske løsningen $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$, der fasevinkelen ϕ i dette tilfellet er uinteressant. Den ikke-lineære likningen (1) kan ikke løses analytisk. Vi skal derfor løse differensiallikningene (1) og (2) *numerisk* ved bruk av *Verlet-integrasjon*. Metoden består ganske enkelt i å bytte ut $\dot{\theta}$ og $\ddot{\theta}$ med de ikke-infinitesimale differensialuttrykkene:[1]

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad \to \quad \frac{\theta(t_{n+1}) - \theta(t_{n-1})}{2\Delta t} \tag{3}$$

$$\ddot{\theta} \quad \to \quad \frac{\theta(t_{n+1}) - 2\theta(t_n) + \theta(t_{n-1})}{\Delta t^2}\,. \tag{4}$$

Vi bytter ut $\ddot{\theta}$ i differensiallikningene (1) og (2) (med $\gamma = 0$) med uttrykket (4) og løser med hensyn på $\theta(t_{n+1})$. Det er da enkelt å finne

$$\text{Lineær likn. (2)} \quad \Rightarrow \quad \theta_{\text{lin}}(t_{n+1}) = \left(2 - \omega_0^2\Delta t^2\right)\theta(t_n) - \theta(t_{n-1}) \tag{5}$$

$$\text{Ulineær likn. (1)} \quad \Rightarrow \quad \theta(t_{n+1}) = 2\theta(t_n) - \omega_0^2\Delta t^2 \sin\theta(t_n) - \theta(t_{n-1}). \tag{6}$$

a. Matlab-scriptet `tfy4115_Ov7.m` som du kan lesse ned fra øvingssiden på nett, implementerer Verlet-algoritmene over. Bruk programmet til å sammenligne løsninger av den ikke-lineære pendellikningen (6) med løsninger av den lineariserte likningen (5). Startverdier er gitt øverst i scriptet og programmet gir kurver og utskrift av svingetida T til skjermen. Velg ulike amplitudeverdier (angitt i grader) og kjør programmet gjentagne ganger med forskjellige tidssteg Δt. Print ut minst én graf, noter på verdier for inputverdier og lever inn sammen med resten av øvingen, eller vis grafen til stud.ass. under veiledningstimen. Lag også en liten tabell som viser hva programmet rapporterer for svingetida T for henholdsvis lineær approksimasjon og den ulineære likningen.

b. Om det er akseptabelt å linearisere når amplituden $\theta_0 = 5°$, er sjølvsagt avhengig av nøyaktigheten du krever. Sjekk f.eks. hvor mye et pendelur sinker i et døgn dersom den er kalibrert til å gå med svært liten amplitude (f.eks. 1°), men svinger med 5°.

c. Analytisk løsning av likn. (1) gir følgende uttrykk for perioden ved rekkeutvikling:

$$T(\theta_0) \;=\; T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right], \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Sammenlikn resultater fra Matlab-scriptet med dette uttrykket f.eks. for $\theta_0 = 5°$ og $\theta_0 = 15°$.

Ekstraoppgave: **d.** Utfordre Matlab-programmet ved å simulere for θ_0 lik eller nærme 180°. Du må nok da øke tidsintervallet vi integrerer over. Her er kun den ikke-linære løsningen interessant, og den forutsetter en "stiv" snor for å avbilde virkeligheten. Kommentarer?

Utvalgte fasitsvar:
1b: $-\,\hat{\mathbf{z}}\,\frac{7}{5}mbV$; 1c: $\frac{5}{7}\,g\sin\theta$; 2b: $60°, 65°$ og $71°$; 3d) 1,18 m/s

---

[1] Følger direkte fra definisjonen av den deriverte. I uttrykket for $\dot{\theta}$ er det to tidssteg mellom $\theta(t_{n+1})$ og $\theta(t_{n-1})$, derfor $2\,\Delta t$ i nevneren. Siste uttrykk framkommer f.eks. fra

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t} \quad \to \quad \frac{\dot{\theta}(t_{n+\frac{1}{2}}) - \dot{\theta}(t_{n-\frac{1}{2}})}{\Delta t} = \frac{\frac{\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)}{\Delta t} - \frac{\theta(t_n)-\theta(t_{n-1})}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\theta(t_{n+1}) - 2\theta(t_n) + \theta(t_{n-1})}{\Delta t^2}\,.$$