TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
Øving 8

Veiledning: Man 24. okt. 14:15-16 og ons 26. okt. 10:15-12. Gruppeinndelingen finner du på emnets nettside.
Innlevering: Torsdag 27. okt. kl. 12:30 Lever øvinger i bokser utenfor R1.

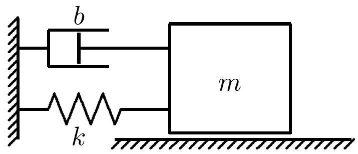
Et læringsmål er at numerisk fysikk skal bli en integrert del av fysikkundervisningen ved NTNU. I forrige øving var det en oppgave basert på å kjøre en oppgitt numerisk programkode. I oppgave 1d er det en veldig lik oppgave for dempet svingning. Scriptet er på nettsiden oppgitt i Matlab (Octave) og i Python.

Oppgave 1. Dempet svingning

a. På grunnlag av figuren til høyre, vis hvordan man kommer fram til likningen for dempede svingninger:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

og finn γ og ω_0 uttrykt med m, b og k.



b. Hva betyr det at et system er overkritisk, underkritisk eller kritisk dempet?

c. Vis ved innsetting at $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \phi)$ er en løsning av svingelikningen (1) når svingningen er underkritisk dempet ($\gamma < \omega_0$). Finn herfra uttrykk for ω_d.

d. Vi løser nå differensiallikningen (1) numerisk ved bruk av *Verlet-integrasjon*. Denne metoden består ganske enkelt i å bytte ut $\ddot{x}$ og $\dot{x}$ med endelig-differansuttrykkene

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \to \quad \frac{x(t_{n+1}) - x(t_{n-1})}{2\Delta t} \tag{2}$$

$$\ddot{x} \quad \to \quad \frac{x(t_{n+1}) - 2x(t_n) + x(t_{n-1})}{\Delta t^2}\,. \tag{3}$$

Her er $t_n = t_0 + n\Delta t$ hvor Δt er tidssteget og t_0 starttiden. $\Delta t^2 = (\Delta t)^2$. Bytter vi i differensiallikningen (1) $\dot{x}$ og $\ddot{x}$ ut med uttrykkene (2) og (3) og løser med hensyn på $x(t_{n+1})$, finner vi

$$x(t_{n+1}) = \frac{2 - \omega_0^2\Delta t^2}{1 + \gamma\Delta t}\, x(t_n) - \frac{1 - \gamma\Delta t}{1 + \gamma\Delta t}\, x(t_{n-1}). \tag{4}$$

Iterasjonen bestemmer altså den neste x-verdien $x(t_{n+1})$ på grunnlag av de to foregående. For å starte denne iterasjonen må vi vite $x(t_0)$ og $x(t_1)$. Hvorfor må vi vite to verdier for å komme i gang?

Matlab-scriptet `tfy4115_Ov8.m` eller Python-scriptet `tfy4115_Ov8.py` som du kan lesse ned fra øvingssiden på nett, implementerer Verlet-algoritmen over. Startverdier er gitt øverst i scriptet, og disse kan du endre på og kjøre programmet gjentagne ganger og for hver gang studere resultatet i figuren.

Kjør scriptet for forskjellige tidssteg Δt og sammenlign med den analytiske løsningen som også er kodet inn og framkommer som rødt i grafen. Sjekk nøyaktigheten ved valg av ulike (ekstreme) verdier av Δt. Velg også andre verdier for inputverdiene γ og ω_0 og sjekk slik også overdempet og kritisk dempet løsning med den analytiske løsningen. Hvis du velger startverdier $x(t_0) \neq x(t_1)$ må du lese i pkt. **f** nedenfor.

Print ut minst én graf, noter på verdier for inputverdier og lever inn sammen med resten av øvingen.

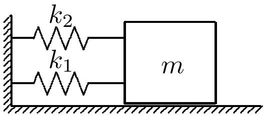
e. En pendel består av ei aluminiumkule festa i en 1,00 m lang tråd. Målinger gir at i løpet av 2,0 minutter vil amplituden minke fra $6,00^\circ$ til $5,10^\circ$.
i) Bestem koeffisienten γ i likningen for underkritisk demping.
ii) Bestem perioden T_d for den dempede svingningen.

f. EKSTRAOPPGAVE: I scriptet er gitt to startverdier (amplituder) `x(1)=` $x(t_0)$ og `x(2)=` $x(t_1)$. Disse gir starthastigheten $\dot{x}(t_0)$ = `(x(2)-x(1))/dt`. Den numeriske løsningen fungerer også for en viss startfart $\dot{x}(t_0) \neq 0$, dvs. `x(2)`$\neq$`x(1)`, men den analytiske løsningen må da ha andre uttrykk for konstantene ϕ, A og B. Finn disse konstantene for henholdsvis underdempet, kritisk dempet og overdempet løsning og korriger de analytiske løsninger i programmet.

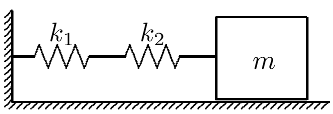
Oppgave 2. Kopling av fjærer

Et enkelt masse-fjær-svingesystem med masse m og fjærstivhet k_i har som kjent svingefrekvens $\omega_i = \sqrt{k_i/m}$. Sett opp Newtons lover for de tre svingesystemene vist i figurene under og finn svingefrekvensen ω for hvert av systemene uttrykt med ω_1 og ω_2. I alle tilfellene er fjærene masseløse og det er ingen friksjon.

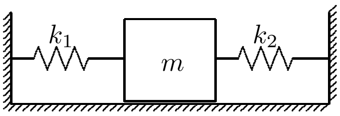
a.



b.



c.



Oppgave 3. Vertikal svingning

Vi har i forelesning studert og beskrevet svingningen for en kloss (masse m) festa til ei fjær (fjærkonstant k) når klossen beveger seg på et friksjonsfritt horisontalt underlag. Vi fant fra Newton 2 bevegelseslikningen $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ med løsning $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ der $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ er vinkelfrekvensen og ϕ er en fasekonstant.
La nå massen og fjæra dreies 90 grader slik at massen m henger vertikalt i tyngdefeltet med øvre del av fjæra festa i et fast punkt. Ny likevektsposisjon for klossen tilsvarer at fjæra er strukket en lengde Δx.

a. Finn et uttrykk for Δx.

b. Finn bevegelseslikningen for klossen med utsving y fra likevektsposisjonen, og vis dermed at den vil svinge harmonisk med samme frekvens som for en horisontal masse-fjær-pendel.

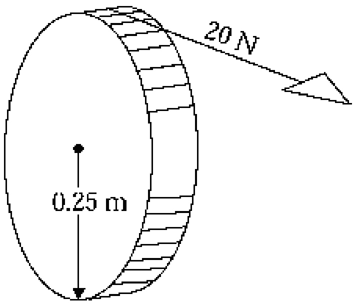
c. Finn den totale energien E for dette vertikale svingesystemet, uttrykt med oppgitte størrelser: m, k, startverdier $v_0 = v(t=0), y_0 = y(t=0)$ samt tyngdens akselerasjon g.

(forts.)

Oppgave 4. Flervalgsoppgaver

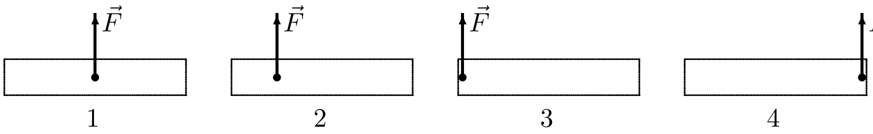
a. Ei tynn, masseløs snor er trukket rundt en slipestein med radius 0,25 m. Steinen kan rotere friksjonsfritt om dens akse. Ei konstant kraft på 20 N i snora får steinen til å øke vinkelhastigheten fra null til 60 rad/s på 12 sekunder. Da er treghetsmomentet til steinen

A) 0,32 kg m^2
B) 1,00 kg m^2
C) 2,00 kg m^2
D) 4,00 kg m^2
E) 6,28 kg m^2



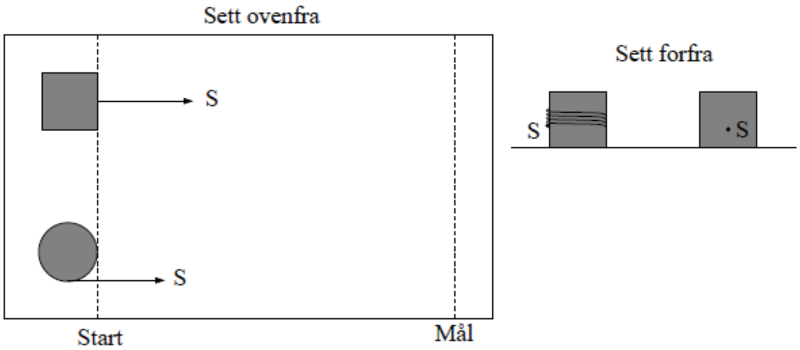
b. Figuren viser fire like staver som utsettes for samme ytre kraft $\vec{F}$, men med ulike angrepspunkt. Ingen andre krefter virker på staven. Hva kan du da si om akselerasjonen $a_i = |\vec{a}_i|$ til massesenteret til stav nr i?

A) $a_1 > a_2 > a_3 = a_4 \neq 0$
B) $a_1 < a_2 < a_3 = a_4$
C) $a_1 = a_2 > a_3 = a_4$
D) $a_1 > a_2,\ a_3 = a_4 = 0$
E) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$



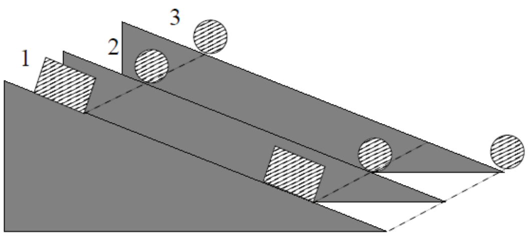
c. Figuren viser en kloss og en spole, begge med masse M, som trekkes med *samme konstante snordrag* S mot høyre. Snora er viklet flere ganger rundt spolen (som på ei trådsnelle eller en jojo). På klossen er snora festa litt under midten av den ene sidekanten. Det er ingen friksjon mellom underlaget og de to legemene. Hvilket legeme bryter mållinjen først? Roterer spolen når den bryter mållinjen?

A) Klossen først,
spolen roterer
B) Klossen og spolen samtidig,
spolen roterer
C) Klossen først,
spolen roterer ikke
D) Klossen og spolen samtidig,
spolen roterer ikke
E) Spolen først,
spolen roterer



d. Figuren illustrerer en kloss (legeme 1) og to sylindersymmetriske legemer (2 og 3) på identiske skråplan. De tre legemene har lik masse. Klossen glir på skråplanet, de to andre ruller uten å gli eller slure. Vi ser bort fra rullemotstand, dvs. ingen energitap pga. rulling. De tre slippes samtidig fra samme høyde på skråplanet, med null starthastighet. Litt senere har legeme 3 nådd bunnen av skråplanet. Legeme 1 og 2 har nå kommet like langt men har fortsatt et stykke igjen til bunnen. Ranger friksjonskreftene f_1, f_2 og f_3 som virker fra skråplanet på henholdsvis legeme 1, 2 og 3.

A) $f_1 = f_2 > f_3$
B) $f_2 < f_1 < f_3$
C) $f_1 > f_2 > f_3$
D) $f_1 = f_2 < f_3$
D) $f_1 > f_2 = f_3$



Utvalgte fasitsvar:
1e) $1,35 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$, 2,01 s; 2b) $\frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}$, 2c) $\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$; 3c) $E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ky_0^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$.