Oppgave 1 Lab i TFY4120

Foroppgave i usikkerhetsanalyse – Viskositet i glyserol

Institutt for fysikk, NTNU

1. Innledning

Hensikten med denne oppgaven er først og fremst å få øvelse i analyse av feilkilder og feilforplanting. Måling av viskositet i glyserol er valgt fordi apparaturen er enkel og rimelig. Formålet med oppgaven er ikke først og fremst å bestemme viskositeten i glyserol så nøyaktig som mulig. Derfor er denne apparaturen ikke laget slik at all måleusikkerhet minimaliseres.

Selv om formålet med denne oppgaven først og fremst er å lære usikkerhetsanalyse, må det likevel påpekes at Stokes lov, som en her stifter bekjentskap med, er sentral. Oppgaven illustrerer også en enkel måte å måle viskositet i en væske når viskositeten er tilstrekkelig høy.

2. Teori

Når en kule synker i en væske under påvirkning av tyngdekraften, vil den oppnå konstant hastighet etter å ha falt et lite antall diametre [1]. For tilstrekkelig liten fallhastighet er friksjonskraften, F_{F}, som virker på kulen, gitt ved Stokes lov [2]:

$$F_{\mathrm{F}} = 6\pi\eta r v \qquad (1)$$

der

η = væskens viskositet
r = kulens radius
v = kulens hastighet

Kraftlikevekt gir da

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\mathrm{k}} - \rho_{\mathrm{v}})g = 6\pi\eta r v \qquad (2)$$

der

g = tyngdens akselerasjon
ρ_{k} = tettheten til kulen
ρ_{v} = tettheten til væsken

Fra (2) får vi:

$$\eta = \frac{2(\rho_{\mathrm{k}} - \rho_{\mathrm{v}})gr^2}{9v} \qquad (3)$$

Vi ser av lign. (3) at vi kan finne viskositeten til en væske ved å måle en kules fallhastighet i denne væsken.

En betingelse for at lign. (1) og dermed lign. (3) skal være gyldig, er at fallhastigheten er tilstrekkelig lav. Denne betingelsen kvantifiseres ved hjelp av det dimensjonsløse Reynolds tall, R_{e}, definert ved [3]:

$$R_{\mathrm{e}} = \frac{2r\rho_{\mathrm{v}}v}{\eta} \qquad (4)$$

Det er vist [3] at Stokes lov holder med en nøyaktighet på bedre enn 1% for:

$$R_e < 0,05 \tag{5}$$

Det er også en forutsetning for å kunne bruke lign. (3) at kulen faller i en væske med uendelig utstrekning. I praktiske tilfeller må vi korrigere for veggeffekter. I det tilfelle at kulen faller vertikalt langs sentrum i en sylinder er følgende korreksjon funnet [4] for korrigering av viskositeten gitt ved lign. (3):

$$\eta_{\text{korr}} = \eta_{\text{m}}(1 - 2,10\frac{r}{R}) \tag{6}$$

der

R = radius av sylinderen
η_{m} = viskositet beregnet etter lign. (3)

Resultater korrigert med denne faktor er funnet [4] å ha bedre enn 1% nøyaktighet når $r/R < 0,1$ og $R_e < 0,05$.

Kombinasjon av lign. (3) og (6) gir:

$$\eta = \frac{2(\rho_k - \rho_v)gr^2}{9v} \cdot (1 - 2,10\frac{r}{R}) \tag{7}$$

3. Apparatur og utførelse

Det fallkuleviskosimeteret som skal brukes i denne oppgaven er vist i figur 1. Det er forsynt med en trakt som sentrerer kulen i fallrøret. Det har 4 målestreker. Avstanden mellom nabomålestreker er $(10{,}0 \pm 0{,}1)$ cm. NB! Pass på at du observerer kulen med synsretning normalt på sylinderoverflaten!

Kulen som nyttes, er av stål og kan løftes opp i røret ved hjelp av en utvendig magnet. Fallrøret skal <u>ikke</u> åpnes under forsøket.

Væsken som nyttes i dette forsøket er glyserol. Viskositeten i glyserol er sterkt temperaturavhengig. Ved siden av fallrøret har vi derfor plassert et lignende rør fylt med glyserol der en kan avlese temperaturen.

Oppgitte data:

Tetthet for glyserol:	$\rho_{\text{v}} = (1{,}26 \pm 0{,}01)$ kg/dm^3
Tetthet for stålkule:	$\rho_{\text{k}} = (7{,}8 \pm 0{,}1)$ kg/dm^3
Radius for stålkule:	$r = (1{,}00 \pm 0{,}02)$ mm
Radius innvendig for fallrør:	$R = (10{,}7 \pm 0{,}1)$ mm
Tyngdens akselerasjon:	$g = (9{,}822 \pm 0{,}005)$ m/s^2

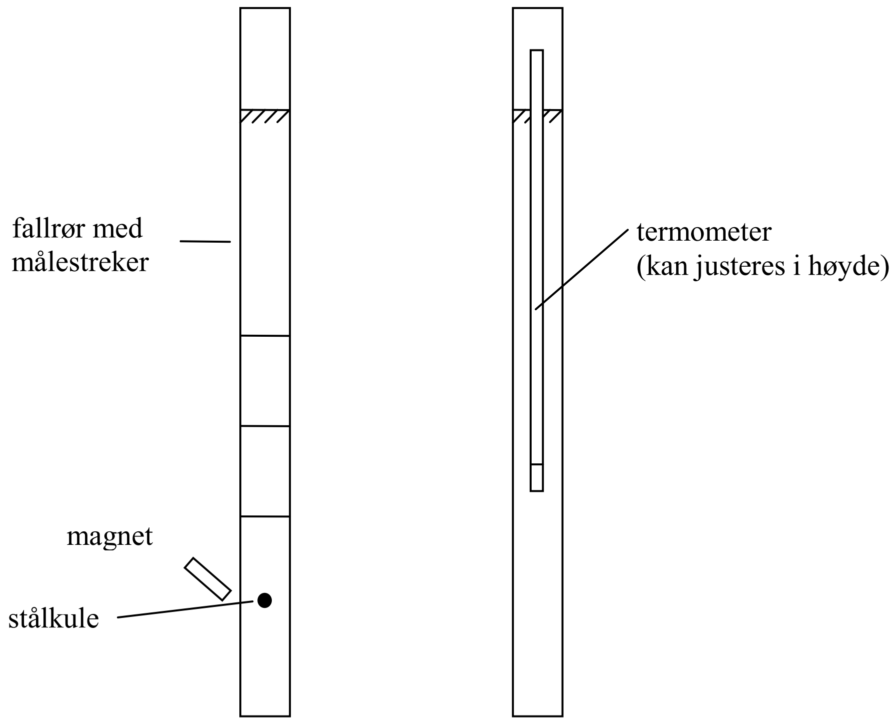


Fig. 1. Skisse av fallkuleviskosimeter

Merk at ditt strålende ansikt og/eller friske pust til og med kan varme glyserol. Hold dere derfor lengst mulig unna fallrøret mens dere gjør målingene.

4. Forhåndsoppgave

Finn et uttrykk for relativ usikkerhet i fallhastigheten v, dvs. finn $\frac{\Delta v}{v}$ som funksjon av falllengden l og måletiden τ og de tilsvarende usikkerheter Δl og $\Delta \tau$. Merk at det er nødvendig å lese notatet om "Usikkerhetsanalyse" utlagt på fagets hjemmeside før denne oppgaven løses.

5. Obs før du starter med laboratorieoppgaven

- Det legges vekt på forståelse av grunnleggende prinsipper. Forsøk å jobbe rolig og metodisk for å lære mest mulig. Vi forventer i alle fall at du sitter ut hele labtida. For denne oppgaven er labtida satt til 4 timer. Det er ikke et krav at alle oppgavene utføres.

- Bruk garderobehyllene. Sett ryggsekker til side. Spising og drikking er dessverre ikke tillatt inne på laben.

- Apparaturen for denne oppgaven er oppsatt der andre oppgaver vanligvis kjøres. Vennligst ikke rør annen apparatur enn den som tilhører denne oppgaven. (Noe av utstyret tilhørende de andre oppgavene kan være både skjørt og kostbart.)

6. Laboratorieoppgave

1 Mål kulens falltid i glyserol med usikkerhet på følgende måte:

a) Utfør 30 målinger av falltiden τ for stålkulen mellom høyeste og laveste målestrek. Del målingene i 3 serier med 10 målinger i hver. Les av temperaturen T før og etter hver måleserie. Måleseriene utføres fortløpende for å minimalisere eventuelle temperaturendringer under forsøket. La termometrets følsomme område (væskebeholderen) være plassert midt mellom øverste og nederste målestrek. Da kan en håpe på å avlese middeltemperaturen over fallstrekningen, også for det tilfelle at det skulle være små temperaturgradienter i vertikalretningen.

b) Beregn $\overline{\tau_1}$, $\Delta\tau_1$ og $\Delta\overline{\tau_1}$ for første måleserie og tilsvarende for måleserie 2 og 3. Anta for beregningene at statistisk usikkerhet i tidsmålingene dominerer.

2 Besvar følgende spørsmål ved bruk av måleresultatene:

a) Er $\overline{\tau_1}$, $\overline{\tau_2}$ og $\overline{\tau_3}$ forskjellige utover den statistiske måleusikkerheten? Bør en bruke standardavvikene $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$ og $\Delta\tau_3$ for enkeltmålinger eller standardavvikene $\Delta\overline{\tau_1}$, $\Delta\overline{\tau_2}$ og $\Delta\overline{\tau_3}$ for middelverdier for å avgjøre dette?

b) I "Handbook of Chemistry and Physics" [5] er det oppgitt følgende data for glyserol ved forskjellige temperaturer ($1\,\mathrm{cp}\ (\mathrm{centipoise}) = 1\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{ms}}$):

Temperatur T (°C)	Viskositet η (cp)
15	2330
20	1490
25	954
30	629

Stemmer eventuell forskjell i midlere falltid mellom måleseriene med eventuell temperaturendring mellom måleseriene i henhold til tabellen?

Merk at glyserolen vi måler på har et vanninnhold på ca. 2%, og at viskositeten på glyserol er sterkt avhengig av vanninnholdet. Det er ikke oppgitt vanninnhold for dataene som er hentet fra referanse 5.

c) Vær oppmerksom på at systematisk temperaturendring kan føre til at verdiene for $\overline{\Delta\tau_1}$, $\overline{\Delta\tau_2}$ og $\overline{\Delta\tau_3}$ blir vesentlig større enn de ville ha vært dersom en bare hadde tilfeldige feil. Synes dette å ha vært tilfelle i ditt eksperiment?

d) Å dele målingene opp i intervaller og sammenligne middelverdier og standardavvik er bare én mulig metode for å påvise om det har vært vesentlig systematisk forandring i τ på grunn av temperaturendring. Kunne det tenkes en bedre metode for å gjøre dette ved bruk av dine målinger?

e) Ville det føre til en vesentlig mindre usikkerhet i $\overline{\tau}$ dersom temperaturen kunne holdes konstant? Kan du komme på en måte å endre eksperimentet på for å oppnå dette?

3 Dersom en ikke er overbevist om at τ har variert vesentlig pga. temperaturendring, beregnes verdier for $\overline{\tau}$ og $\overline{\Delta\tau}$ felles for alle målingene. Disse verdiene brukes i fortsettelsen av oppgaven. I motsatt tilfelle velges ett sett verdier fra en enkelt måleserie.

a) Bestem midlere fallhastighet med usikkerhet, $v \pm \Delta v$. Avstanden mellom øverste og nederste strek settes lik $(30{,}0 \pm 0{,}1)\,\text{cm}$. (Husk at resultatet fra forhåndsoppgaven kan benyttes her, men husk også å vurdere om det er usikkerhet for en enkeltmåling eller usikkerhet for middelverdi som bør benyttes for falltiden.)

b) Beregn tallverdier for η og R_e ved angitt middeltemperatur under forsøket. Er R_e liten nok til at Stokes lov gjelder med nøyaktighet bedre enn 1%?

4 Vi ønsker å bestemme usikkerheten viskositetsmålingen vår.

a) Finn et uttrykk for relativ usikkerhet i η, $\dfrac{\Delta\eta}{\eta}$, som funksjon av r, R, ρ_k, ρ_v, v, g og de tilsvarende usikkerhetene. Prøv så langt det er mulig å bruke relativ usikkerhet, for eksempel $\dfrac{\Delta r}{r}$. Det kan også være nyttig å bruke former som $\dfrac{\Delta\rho_k}{\rho_k - \rho_v}$. Merk at avhengig av hvordan du regner, kan denne oppgaven bli litt arbeidsom. Spør veilederen om hjelp dersom du setter deg fast.

b) I punktet ovenfor fant du et uttrykk for usikkerheten i η, $\Delta\eta$, basert på usikkerhetene Δg, Δr, ΔR, $\Delta\rho_k$, $\Delta\rho_v$ og Δv. Hvilke av disse usikkerhetene er uvesentlige for beregning av $\Delta\eta$ og kan neglisjeres når tallverdi for $\frac{\Delta\eta}{\eta}$ skal bestemmes?

c) Beregn tallverdi for $\frac{\Delta\eta}{\eta}$, og før opp sluttsvaret for $\eta \pm \Delta\eta$. Angi hvilken temperatur resultatet gjelder for.

7. Referanser

1. A. C. Merrington, Viscometry, Edvard Arnold & Co, London 1949, s. 49.
2. L. D. Landau og E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Pergamon press, Oxford 1959, s. 66.
3. A. C. Merrington, Op.cit., s. 45.
4. A. C. Merrington, Op.cit, kapittel IV.
5. R. C. Weast, Ed., Handbook of Chemistry and Physics, CRC Press, Cleveland 1974, s. F-53.

Knut Arne Strand 2005

Revidert 06.01.2006, AB/LMA/EH/KAS
Revidert 27.01.2007 HH/KAS
Revidert 27.11.2007 RS/LEW/KAS
Revidert 19.10.2011 SW/BS

EN LITEN INNFØRING I USIKKERHETSANALYSE (Forutsetter at tilsvarende forelesning følges.)

1. Forskjellige typer feil:

a) Definisjonsusikkerhet

Eksempel:
Tenk deg at du skal måle lengden av et noe ullent legeme, f.eks. en sau.

Botemiddel:
Legg vekt på klare og spesifiserte definisjoner.

b) Grove feil

Eksempel:
Teller feil antall meter når måler lengde med meterstokk.

Botemiddel:
Gjør dem ikke.

c) Systematiske feil

Se nedenfor.

d) Statistiske feil

Se nedenfor.

KONKLUSJON:

– Bruk sunn fornuft.

– Ikke bruk formler for statistisk usikkerhet ukritisk.

2. Systematiske feil:

Forårsakes av blant annet:

a) Feil kalibrert måleinstrument
b) Metning av måleinstrument
c) Menneskelig egenskap
d) Andre forsøksbetingelser enn antatt

Eksempel:
Meterstokk er ikke eksakt 1 m, men 0,9998 m.

Botemidler:
a) Tenk kritisk på utføring av måling.
b) Sjekk nøyaktighet og område for måleinstrument.
c) Kalibrer måleutstyr.
d) Anslå fornuftig grense for ukorrigerbare systematiske feil.

3. Statistisk usikkerhet:

Gjentatte målinger av én og samme størrelse under samme forsøksbetingelser gir forskjellige verdier.

Eksempel:
Dersom en flere ganger måler lengden på et bord (f.eks. 5 m) med meterstokk med lengde 1 m og fin gradering, vil en få ulike verdier.

Botemiddel:
Mål mange ganger og beregn middelverdien.
Variasjonen i målingene gir mål for usikkerhet som benevnes f.eks. Δx.

Eksperimentelt viser det seg at målingene blir tilnærmet normalfordelt[1] i mange tilfeller:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

der

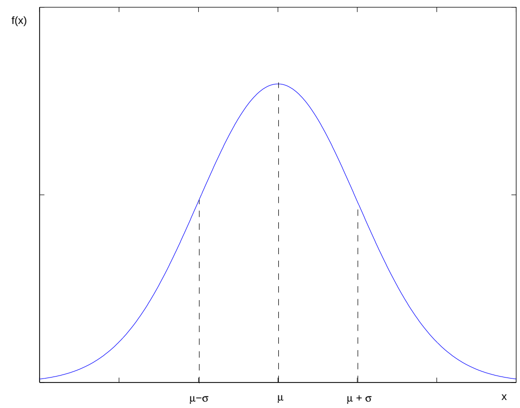
$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sannsynlighet for å måle verdien } x \\ \mu &= \text{middelverdi} \\ \sigma &= \text{standardavvik} \end{aligned}$$

Teoretisk [2] kan det vises at en får normalfordeling når det totale feilbidraget er sammensatt av uendelig mange feilbidrag som adderes uavhengig av hverandre.

Ca. 68% av målingene ligger i $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
Ca. 95% av målingene ligger i $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
Ca. 99,7% av målingene ligger i $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

(En snakker om 1σ, 2σ eller 3σ grenser.)

[1] Normalfordeling vil bli nærmere behandlet i læreboka [1] i statistikkfaget TMA4240 eller TMA4245 som de fleste først får i tredje årskurs.



Figur 1: Normalfordeling

Estimater for μ og σ:

(NB! Forutsetter tilnærmet normalfordeling.)

Estimat for middelverdi [3] μ:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2}$$

Estimat for standardavvik [3] σ = usikkerhet i enkeltmåling (1σ-grense):

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \tag{3}$$

Estimat for usikkerhet i middelverdi [3]:

$$\Delta\overline{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

Merknader:

1) $\Delta\overline{x} \to 0$ for $n \to \infty$.
(Husk at dette gjelder statistisk usikkerhet, ikke systematisk.)

2) Det ovenfor gjelder når alle målinger er like sikre. Ellers må vektfaktor nyttes.

3) Husk å skille mellom systematisk og statistisk usikkerhet, og statistisk usikkerhet i enkeltmåling og middelverdi!

4. Feilforplantning:

Vi betrakter en fysisk størrelse $f(x, y, z, \dots)$ som beregnes ut fra målinger av de fysiske størrelser $x, y, z, \dots$. Anta at x, y, z osv. er <u>uavhengige</u>. Da gjelder [4]:

$$\Delta f = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right)^2 + \dots \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

for tilstrekkelig små $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ osv.

I mangel av noe bedre nyttes lign.(5) også ofte for systematiske feil og for kombinasjon av systematiske og statistiske feil. For systematiske feil representerer Δx, Δy osv. anslått usikkerhet.

Det verste tilfellet (alle feil virker i samme retning) ville for små feil være:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots \tag{6}$$

Dersom en har målt middelverdier for x, y, z osv. nytter en:

$$f = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \dots) \tag{7}$$

og

$$\Delta f = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta \overline{x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta \overline{y} \right)^2 + \dots \right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

Merk at målet ikke er å bruke mest mulig formler, men å komme fram til et så forstandig <u>anslag</u> på usikkerhet som mulig.

<u>*Eksempel:*</u>

$f(x, y, z) = \text{konstant} \cdot \frac{x \cdot y^2}{z^3}$ gir:

$$\frac{\Delta f}{f} = \left(\left(\frac{\Delta x}{x} \right)^2 + \left(2 \frac{\Delta y}{y} \right)^2 + \left(3 \frac{\Delta z}{z} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Merk at det ofte letter regningen å nytte relative feil som f. eks. $\frac{\Delta x}{x}$.

5. Bestemmelse av rett linje ved minste kvadraters metode:

Vi tenker oss at vi har en fysisk modell som sier oss at tilsvarende målinger av x og y skal bli liggende på en rett linje:

$$y = k_1 + k_2 x \tag{9}$$

der k_1 og k_2 er fysiske konstanter vi ønsker å bestemme.

Lign.(9) kan omskrives til:

$$y = a + b(x - \overline{x}) \tag{10}$$

der

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ a &= k_1 - b\overline{x} \\ b &= k_2 \end{aligned}$$

Dersom alle målinger har samme usikkerhet, nyttes de verdier av a og b (og dermed k_1 og k_2) som minimaliserer:

$$Q \equiv \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + b(x_i - \overline{x}))]^2 \tag{11}$$

(Derav navnet minste kvadraters metode.)

Vi finner minimum for Q ved:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \tag{12}$$

og

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \tag{13}$$

som etter litt mellomregning gir:

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{14}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{15}$$

Merknader:

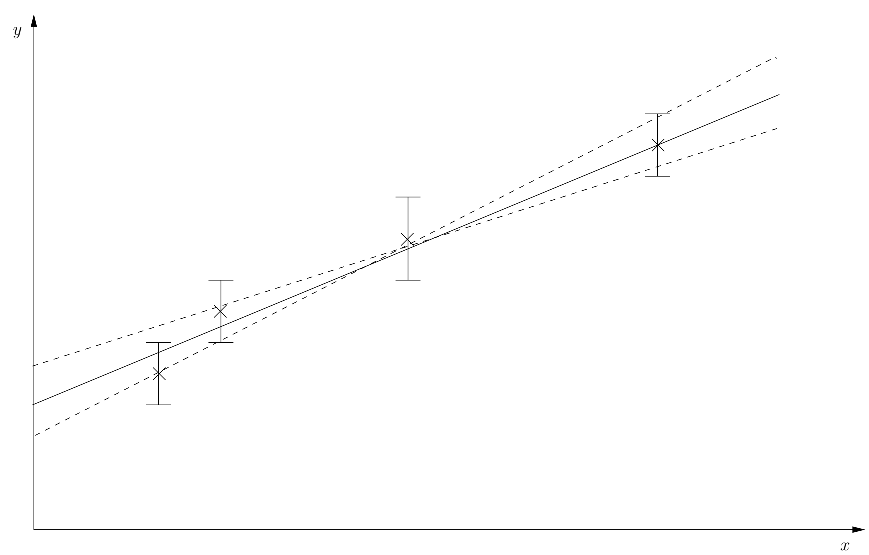
1) Dersom målepunktene har ulik usikkerhet må vektfaktorer nyttes.

2) Tilsvarende metode kan også nyttes for høyere ordens polynom dersom y er lineær i koeffesientene k_i som skal tilpasses.

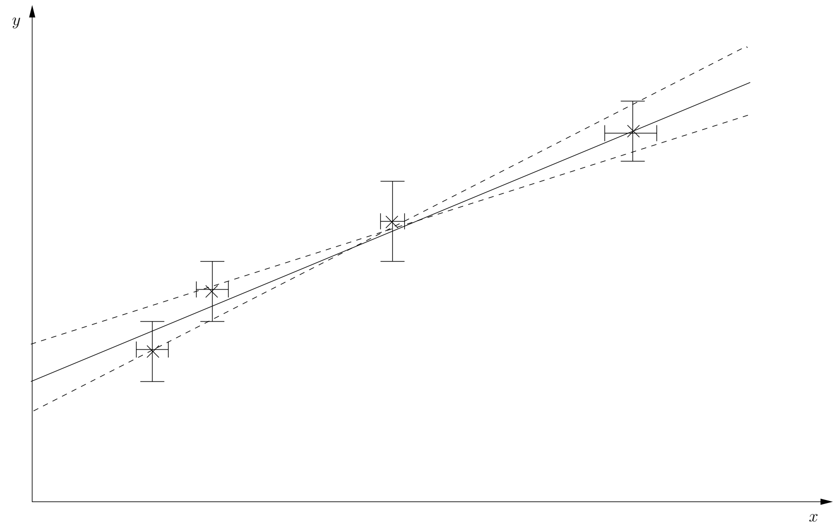
3) Et Excel-ark for innlegging av rett linje ved minste kvadraters metode (regresjon) er utlagt på hjemmesidene under menyvalget **Regresjon**. Dette Excel-arket kan og gi usikkerhet for koeffisientene k_1 og k_2 i ligning 9. Formelverk og utledning for det siste er gitt f.eks. i [5].

6. Visuell innlegging av rett linje:

Dersom den fysiske modellen er lineær i x, kan en ofte få et brukbart estimat ved visuell innlegging av en rett linje som vist i figur 2. De stiplede linjene i denne figuren representerer linjene med maksimal og minimal vinkelkoeffisient som en antar kan være mulig ut fra de eksperimentelle data. Disse gir anslag på usikkerhetene i k_1 og k_2 i ligning 9. En slik visuell innlegging kan være fordelaktig sammenlignet med regresjon dersom ulike målepunkt har ulik usikkerhet og regresjonsprogrammet ikke har mulighet for å benytte vektfaktorer, eventuelt dersom en vet at ett eller flere av målepunktene har større systematisk usikkerhet enn de andre og ikke vet hvordan dette skal kvantifiseres.



Figur 2: Illustrasjon av innlegging av rett linje visuelt.



Figur 3: Illustrasjon av innlegging av rett linje visuelt for tilfellet med usikkerhet langs begge akser.

Merknad:

Av og til kan det være vesentlig eksperimentell usikkerhet i størrelsene som plottes langs begge akser. Usikkerhetsstolper bør da anføres i begge retninger som vist på figur 3. I slike tilfelle kan det være spesielt gunstig å benytte visuell innlegg av rett linje.

Referanser

[1] R.E. Walpole, R.H. Myers, S.L. Myers and K. Ye: *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, Eight Edition, Pearson, London 2007, kapittel 6.

[2] N.C. Barford, *Experimental Measurements: Precision, Error and Truth*, Second Edition, Wiley, New York 1985, kapittel 5.

[3] R.E. Walpole et.al., op.cit.[2], kapittel 9.3.

[4] N.C. Barford, op.cit., kapittel 2.3.

[5] N.C. Barford, op.cit., kapittel 3.3.

Knut Arne Strand, 2004
Revidert 16.11.2005 KAS
Revidert 13.08.2006 LEW/KAS

[2] Op.cit. betyr sitert ovenfor.