Oppgave 2 Lab TFY4120

Mekaniske svingesystemer

Institutt for fysikk, NTNU

1.1 Innledning

I denne oppgaven skal vi studere begrepene fri og tvungne svingninger i et enkelt svingesystem. Vi skal spesielt gjøre oss kjent med **egensvingning, resonans** og **dempning**. Svingninger kan oppstå i mekaniske systemer og i elektriske kretser. Vi skal her studere mekaniske svingninger, og vil benytte et oppsett hvor amplitude, frekvens og fase til en masse som henger i en fjær registreres ved hjelp av en optisk - digital måleutrustning. Til dokumentasjon kan ni fritt å bruke dator eller å plotte på papir, men plottar og data skall inføres på papirformat i labjournalen som rettes av assistenten.

1.2 Forhåndsoppgave

For en fri, dempet svingning vil amplituden falle av som $Ae^{-\gamma t}$ i samsvar med ligning (B.6).

- **Plott opp for $A = 100$ mm og $\gamma = 0,40\ \text{s}^{-1}$ for t mellom 0 og 10 sekunder.**

- **Plott også opp $\log\left(Ae^{-\gamma t}/1\ \text{mm}\right)$ for t mellom 0 og 10 s.**

1.3 Obs før du starter med laboratorieoppgavene

Det legges vekt på forståelse av grunnleggende prinsipper. Forsøk å jobbe rolig og metodisk. Vi forventer at du sitter ut hele labtida. For denne oppgaven er labtida satt til 4 timer. Det er ikke et krav at alle oppgavene utføres. Stress ned.

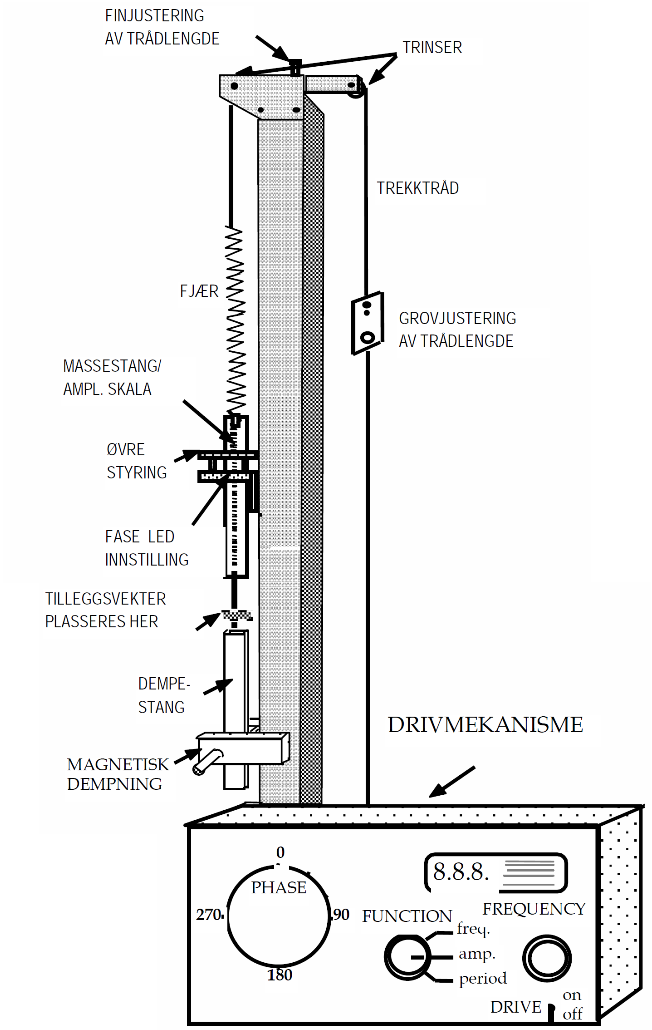
1.4 Apparatur

Svingeforsøkene skal utføres med apparatet vist på figur 3. Her skal vi bare beskrive hovedprinsippet for systemet, mer detaljert beskrivelse finnes i Apparaturbeskrivelsen i vedlegget.

(Masse)stangen med tilleggsvekter kan settes i svingninger. Ved undersøkelse av frie svingninger trekkes dempestangen ned og slippes. Øvre del av fjæren står da fast. Ved eksitasjon av tvungne svingninger beveges fjæren periodisk ved at trekktråden er festet eksentrisk på et roterende hjul på baksiden av apparaturen. Vi får dempning i systemet ved å la massestangen bevege seg i et magnetisk felt. Ved å variere avstanden mellom magnetpolene forandrer vi dempningen. Bevegelsen til stangen blir registrert analogt av en lysdiode (kalt **LED** - **L**ight **E**mitting **D**iode) med tilhørende fotodetektor. De analoge signalene blir omformet til digitale signaler og verdien blir vist på skalaen i vinduet. Med en funksjonsvelger på fronten av apparaturen (se figur 1.1) kan følgende størrelser måles:

- Frekvensen til det roterende hjulet, dvs. frekvensen ved tvungen svingning.
- Amplituden, fra topp til bunn, for stangens svingebevegelse.
- Svingeperioden for stangens bevegelse.

I tillegg vil svingningens fasevinkel i forhold til drivhjulets fasevinkel vises som en lysprikk på den sirkulære skalaen foran på apparaturen. Beklageligvis er dette svært vanskelig å observere på enkelte oppsett. Fjærkonstanten for fjæren bestemmes på laboratorieplassen. Massen av stang og fjær kan finnes.



Figur 1.1

For at apparaturen skal virke tilfredsstillende er det viktig at nullpunktet til stangen justeres til korrekt verdi. Hvordan dette gjøres finnes i Apparaturbeskrivelsen.

1.5 Laboratorieoppgaver

1.5.1 Fjærkonstanten

- **Fjærkonstanten k bestemmes ved å måle forlengelsen med en utlagt målestav når det henges på tilleggsvekter på 50 og 100 g. Merk at massene varierer litt fra lodd til lodd, men for alle gjelder $m = (50,0 \pm 0,5)$ g. Den lokale gravitasjonskonstanten $g = (9,8215 \pm 0,00023)$ ms^{-2} kan man lett finne på nett (http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php)**.

1.5.2 Egenfrekvensen for et svakt dempet svingesystem

Kontroller først at nullpunktet er rett innstilt. Skru av magnetholderen. Trekk fjæren ned, (2 - 3 cm), slipp den og noter perioden for svingningen.

- **Mål svingeperioden for 3 ulike (ekstra) masser (0-50-100 g).**
- **Bestem egenfrekvensen i de tre tilfellene.**
- **Bruk 2 av de eksperimentelle resultatene til å bestemme massen m av stang og fjær eksemplelvis ved hjelp av ligning (B.3), dvs. <u>uten</u> å benytte fjærkonstant fra 1.5.1.**
- **Bestem også fjærkonstanten k ut fra de samme målingene av ω_0 og sammenlign med resultatet i 1.5.1.**

1.5.3 Frie, dempete svingninger

Dempningen i systemet bestemmes ved å måle svingeamplituden som funksjon av tiden. Spesielt ved magnetdempning forandrer verdiene seg meget hurtig slik at det krever rask notering for å få korrekt registrering av kurveforløpet. Uten dempning kan amplituden noteres f.eks. hvert 5. sekund. Ved dempning dør svingningen raskt ut og avlesning må gjøres oftere, helst én gang per periode. Merk at displayet oppdateres én gang per periode og at avlesning skjer best for hver oppdatering (uten bruk av stoppeklokke).

- **Benytt 50 grams ekstramasse i systemet. Still funksjonsvelgeren på amplitude, trekk ned fjæren ca. 3 - 4 cm, slipp den og mål utslaget som funksjon av tiden. Gjør dette først uten magnetdempning. Gjør det så med magnetdempning og mål både for 10 mm og 15 mm avstand mellom magnethodene. (Sjekk om periodetiden varierer vesentlig med dempningen. Se ligning (B.7).**
- **Tegn opp kurveforløpene på logaritmisk papir.**
- **Finn γ for de tre dempningene ved å bestemme e^{-1}-verdien. (Merk at i figur B.1(b) er det brukt lineærskala pa y-aksen, men at du selv altså skal bruke logaritmisk.)**
- **Anslå usikkerheten i γ for tilfellet med magnetdempning med magnetavstand 10 mm.**

1.5.4 Tvungen, dempet svingning. Amplitude som funksjon av frekvens

Drivhjulet settes nå i bevegelse slik at det oppstår en tvungen svingning i svingesystemet. Avhengig av hvor stor dempningen er, kan det bli nødvendig å justere utsvinget til den ytre kraften. Dette gjøres ved å endre eksentret på svinghjulet bak.

Uten magnetdempning er systemet så skarpt resonant at det viser seg nesten umulig a måle i nærheten av resonans - bare prøv - det er en glimrende demonstrasjon av hvor lite eksitasjon som skal til før det oppstår voldsomme resonansbevegelser i et svakt dempet system. Pass bare på å slå av eksitasjonen før utsvinget går i taket!!

Vi skal derfor bare operere med magnetdempning under målingene. Dermed reduserer vi også virkningen av innkoplingsfenomenene som er interessante i seg selv og vil bli studert i pkt. 1.5.5, men en plage når vi skal måle bare den tvungne svingning.

Resonansfrekvensen er gitt ved den påtrykte frekvens som gir maksimalt utsving. Dempningen som ved tvungne svingninger henger sammen med resonansens størrelse og skarphet, kan vi bestemme ved å måle forholdet mellom utsvinget ved lave frekvenser, A_0, og utsvinget for $\omega_f = \omega_0, A_{\omega_0}$, (dvs. utsvinget nær resonans).

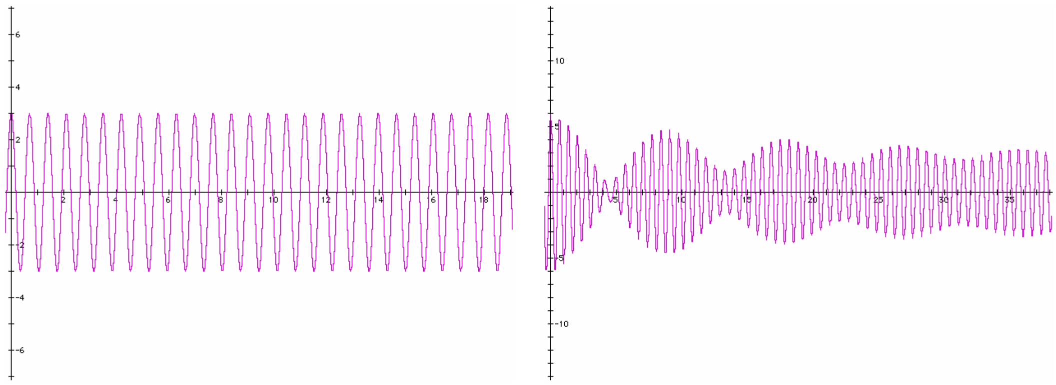
- **Bruk 10 mm og deretter 6 mm avstand mellom magnetpolene. 50 g ekstramasse.**
- **Mål utsvinget som funksjon av frekvens fra ca. 0,1 Hz til en frekvens over resonansfrekvensen der utsvinget er omtrent dødd ut. Bruk tilstrekkelig mange målepunkt, spesielt rundt resonansen, slik at dere får plottet opp kurvene nøyaktig på mm-papir. Bestem resonansfrekvensene fra kurvene.**

- **Sammenlign resonansfrekvensene med systemets egenfrekvens målt i pkt. 1.5.2.**
- **Bestem også γ for de to dempningene ved å bruke ligning B.15. Sammenlign γ for 10 mm magnetavstand med det som ble målt i pkt. 1.5.3. Er det samsvar innenfor usikkerheten du anslo i pkt. 1.5.3? Hvis ikke, prøv å forklar hvorfor.**

1.5.5 Innsvingningsfenomen - interferens

Under forsøkene med tvungne svingninger var det nødvendig å vente en god stund før utsvinget ble stabilt. Desto mindre dempning, desto lengre måtte vi vente for å få stabile tilstander i systemet. Dette skyldes at når vi starter eksitasjonen vil vi i tillegg til den tvungne svingningen også få satt systemet i egensvingninger på grunn av at innkoplingen eller en hvilken som helst brå forandring av den ytre kraft virker som en kraftpuls. Disse to svingningene setter seg sammen til en resulterende bevegelse med maksima og minima i tiden avhengig om de to bevegelsene går i samme eller motsatt retning. Dette svevningsfenomenet er et eksempel på interferens gitt ved summen av de to bevegelsene gitt ved ligning (B.9). Slike innkoblingsfenomen kan gi ubehagelige overaskelser spesielt ved oppstart av svakt dempete systemer. Figur 4 viser eksempler på start av sterkt (øverst) og svakt (nederst) dempet system.

Den mest dramatiske demonstrasjon av fenomenet får vi når systemet er svakt dempet - vi fjerner derfor magnetdempningen og bruker 50 g masse. Bruk drivfrekvens ca. 0,1 Hz forskjellig fra resonansfrekvens (andre frekvenser kan brukes, men pass på at dere ikke kommer for nær resonansfrekvensen - da kan svingningene bli så voldsomme at apparaturen ødelegges).



(a) Sterkt dempet system.

(b) Svakt dempet system.

Figur 1.2

- **Tiden mellom hver gang amplituden går gjennom et minimum er bestemt av den inverse av differansen mellom frekvensene til den tvungne og den fri svingningen. Sjekk dette. Kan du forklare hvorfor det er slik?**

Ole J. Løkberg 2005
(Basert på tidligere oppgavetekster for lignende oppgaver utarbeidet av Løkberg selv og annet personell ved Institutt for fysikk)

Revidert august 2006 JF/KAS
Revidert 28.11.2007 HT/LEW/KAS
Til LaTeX 04.12.2012 LH
Revidert 10.09.213 EW

Tillegg A

Apparaturbeskrivelse

Utstyrsliste:

- PASCO Mod. ME-9210A Driven Harmonic Motion Analyzer.
- 2 ekstramasser (a) på hver 50,0 g.
- Magnetisk dempning (b).
- Skyvelære og målelinjal.

Bruksanvisning:

(Med referanse til illustrasjon neste side.)

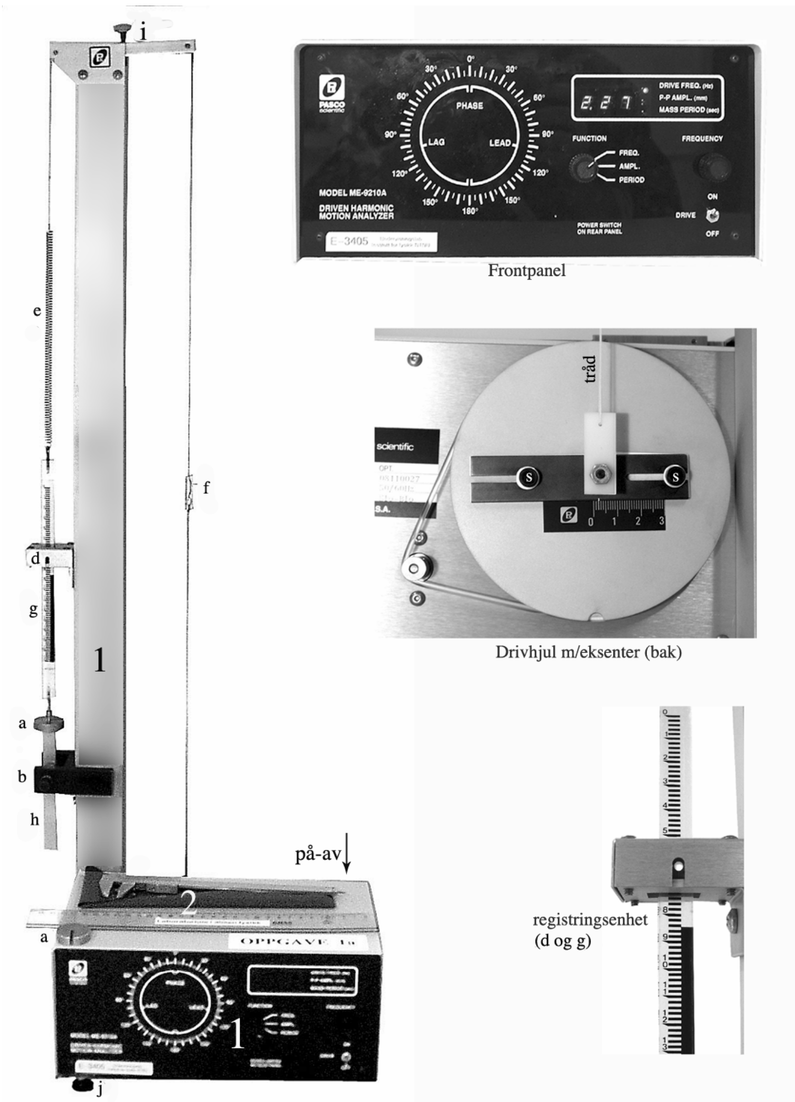
Svingesystemet består av fjæren (e) og en sammensatt masse som består av massen av fjæren pluss massen av stengene (g) og (h) pluss eventuelle tilleggsvekter (a). Amplitude og periode til svingningene registreres av en fotoelektrisk enhet (d) som registrerer hvor mange delestreker på målestangen (g) som passerer. For korrekt registrering må overgangen svart – blankt område på målestangen være sentrert i den fotoelektriske enheten (*se figuren nederst til høyre*). Lyset på stangen vil da så vidt komme på når stangen henger i ro. Justeringen skjer ved at dere forlenger/korter inn tråden, grovjustering med strammeren (f) og finjustering med skruen (i) på toppen av apparatet. *Denne justeringen må foretas hver gang dere henger på ekstravekter*. Det er også viktig at målestangen henger mest mulig fritt i sporet på registreringsenheten, dette er egentlig en engangsjustering, men hvis apparatet er kommet ut av stilling, kan dere rette det opp ved å skru på beina (j) under instrumentet.

Fri svingninger:

Når **FUNCTION** vender (se øverste bilde til høyre) settes på **PERIOD** vises fjærsystemets svingeperiode i sekunder i displayet ovenfor. For dempete svingninger skrus magnetholder (b) på og avstanden mellom magnetene innstilles – bruk skyvelæret. Pass på at dempestangen (h) henger symmetrisk mellom magnetpolene. For opptak av svingninger uten magnetfelt kan dere bruke følgende fremgangsmåte: Les av utsvinget (**FUNCTION** vender på **AMPL**.) hvert 5 sekund inntil utsvinget er redusert til ca. 1/10 av startverdien, da har dere nok data til å tegne opp dempningskurven. Med magnetfelt dempes svingningen så raskt at denne metoden ikke kan brukes. Her må dere lese av hver amplitudeverdi. Svingeperioden gir oss da tiden mellom hver avlesning.

Fri svingninger:

Den tvungne svingningen startes med bryter **DRIVE**. Hvis utsvinget blir for stort kan dere endre drivamplituden ved forandre eksentret på drivhjulet bak på instrumentet (*se midtre bilde til høyre*) – 2 mm eksenter er passe Frekvensen til svingningen endres med **FREQUENCY** knappen og leses av på displayet når **FUNCTION** står på **FREQ**. For å lese av utsvinget settes **FUNCTION** på **AMPL**.



Figur A.1

Tillegg B

Teoretisk Grunnlag

Vi vil her gi en kort utledning av de matematiske formler som beskriver et mekanisk svingesystem.

B.1 Fri, udempet svingning

Vi har et fjærsystem med fjærkonstant k (N/m) og masse m. Hvis vi drar massen en avstand x ut fra likevektsposisjonen får vi en motvirkende kraft som er gitt ved $-kx$. Når massen slippes vil bevegelsen til massen styres av Newtons 2. lov, $F = ma$, hvor akselerasjonen $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Dette gir følgende ligning for posisjonen til massen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{B.1}$$

Løsningen til ligning (B.1) er

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi), \tag{B.2}$$

hvor A er svingeamplituden, ϕ er fasekonstanten og ω_0 og f_0 er henholdsvis vinkelfrekvens og frekvens til svingningen gitt ved følgende relasjoner:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{B.3}$$

hvor T_0 er svingeperioden, og k og m er fjærkonstant og masse. Bevegelsen som er uttrykt ved ligning (B.2) kalles en **fri, udempet svingning**. Legg merke til at den varer til evig tid uten tilførsel av ytre energi når den først er satt i gang.

B.2 Fri, dempet svingning

I reelle svingesystemer vil det alltid være en **dempekraft** F' som er rettet mot bevegelsen. Dempekraften er som regel proporsjonal med hastigheten v slik at den kan skrives som $F' = -bv$. Her er b motstandskoeffisienten ($b > 0$). Det er vanlig å innføre **dempningskoeffisienten** $\gamma = b/2m$ (dimensjon tid^{-1}) og skrive bevegelsesligningen som

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma\frac{dx}{dt}. \tag{B.4}$$

Fra ligning (B.3) har vi $k = m\omega_0^2$ som innsatt i ligning (B.4) gir

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \tag{B.5}$$

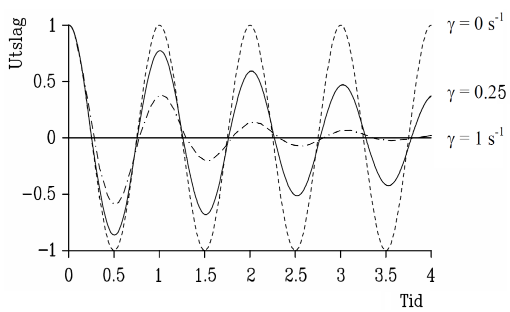
som for det tilfellet vi skal ($\gamma < \omega_0$) betrakte har løsningen

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \phi), \tag{B.6}$$

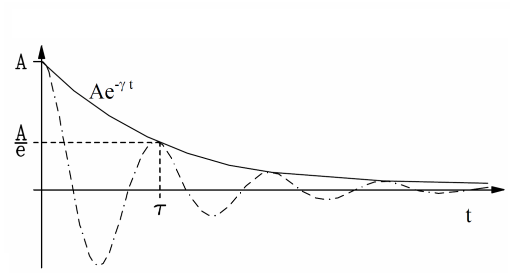
hvor

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}, \tag{B.7}$$

og ϕ er en fasekonstant som avhenger av startbetingelsene til svingningen. Bevegelsen som er beskrevet av ligning (B.6) kalles en **fri, dempet svingning**. Svingeforløpene for ulike dempninger γ er vist i figur B.1(a). I figuren har vi valgt svingetid $T_0 = 1$ s, noe som gir $f_0 = 1$ Hz og $\omega_0 = 2\pi f_0 \approx 6,28$ rad/s.



(a) Svingeforløp.



(b) Tidskonstant.

Figur B.1: (a) Udempet og dempete svingninger for ulike dempekonstanter. (b) Beregning av tidskonstanten.

Vi kan bestemme dempningskoeffisienten γ ved å måle hvor hurtig amplituden reduseres. Denne reduksjonen skyldes eksponentialleddet i ligning (B.6). Dette leddet har sunket til $e^{-1} \approx 0,37$ av den opprinnelige amplitude ved tiden $t = \tau = \gamma^{-1}$. Figur B.1(b) viser hvordan vi kan bestemme τ og dermed γ ut fra kurveforløpet.

B.3 Tvungen, dempet svingning

En periodisk ytre kraft $F_y = F_0 \cos\omega_f t$ eksiterer nå vårt svingesystem. Legg merke til at ω_f, som er vinkelfrekvensen til kraften, kan varieres etter ønske i motsetning til ω_0 som er entydig bestemt av systemet. Hvis vi tar også denne kraften med i kraftligningen får vi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t. \tag{B.8}$$

Når vi løser denne ligningen, får vi en bevegelse $x(t)$ som er gitt ved

$$x(t) = A\cos(\omega_f t - \delta) + x_d(t), \tag{B.9}$$

hvor

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}}, \tag{B.10}$$

$$\tan\delta = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}. \tag{B.11}$$

$x_d(t)$ er en fri, dempet svingning slik som vi fant i forrige avsnitt, ligning (B.6).

I ligning (B.9) representerer som sagt $x_d(t)$ løsningen for den frie, dempete svingningen som settes i gang når vi slår på eller forandrer F_y. $x_d(t)$ vil etter en tid dø ut, men før den dør ut vil den imidlertid kunne modifisere svingeforløpet ganske ettertrykkelig som vi skal observere. Svingningen representert i ligning (B.9) når $x_d(t)$ har dødd ut, kaller vi en tvungen svingning.

Ut fra ligning (B.9) ser vi at for en slik tvungen svingning vil systemet svinge med samme frekvens ω_f som den ytre kraften, men med en amplitude A og en fasekonstant δ som begge varierer med den påtrykte frekvensen.
Av ligning (B.10) ser vi at amplituden A har følgende (grense)verdier:

$$A_{\omega_f \to 0} \to \frac{F_0}{k} \equiv A_0, \tag{B.12}$$

$$A_{\omega_f \to \omega_0} \to \frac{F_0}{2\gamma\omega_0 m} \equiv A_{\omega_0}, \tag{B.13}$$

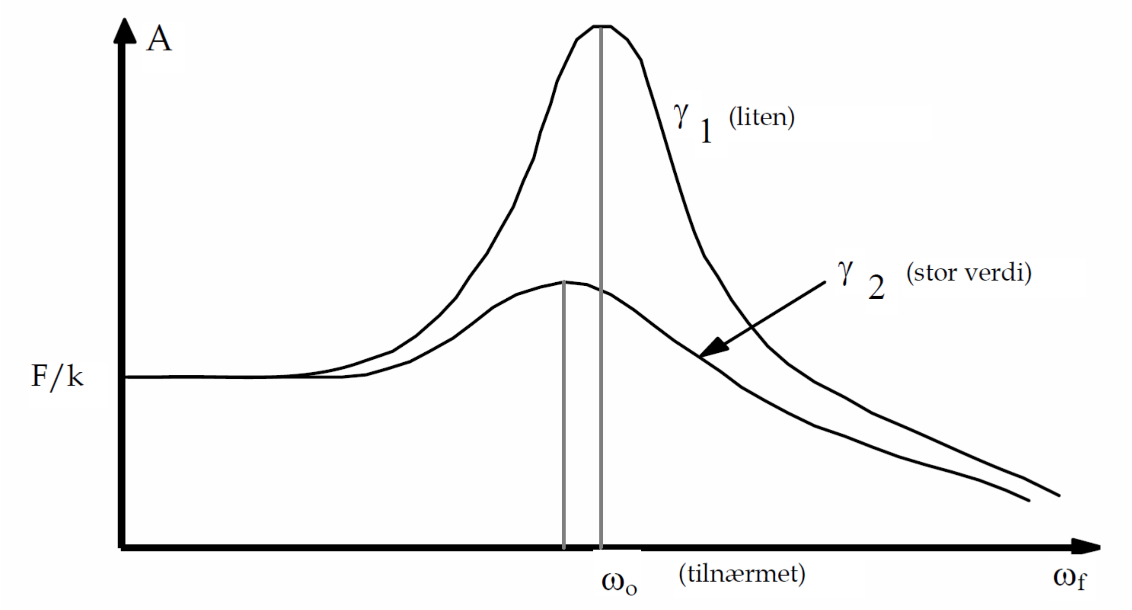
$$A_{\omega_f \to \infty} \to \frac{F_0}{\omega_f^2 m} \equiv A_\infty = 0. \tag{B.14}$$

Kombinerer vi ligningene (B.10) og (B.11) får vi

$$\gamma = \left(\frac{\omega_0}{2}\frac{A_0}{A_{\omega_0}}\right). \tag{B.15}$$

Svingeamplituden A vil ha et maksimum for den vinkelfrekvens ω_f som minimaliserer uttrykket inne i rottegnet i ligning (B.10). For denne frekvensen sier vi at det er utsvingsresonans i kretsen. retsen. For lett dempete system (liten γ) vil resonansfrekvensen være tilnærmet lik systemets egenfrekvens gitt ved ligning (B.3). Liten dempning i systemet gir en skaresonanstopp, med økende dempning reduseres det maksimale utsving og toppen blir bredere som vist på figur B.2.

Fasekonstanten δ mellom den ytre bevegelsen og det resulterende utsving vil også endre seg med ω_f. Ved frekvenser godt under resonans vil de to utsving vare tilnærmet i fase, ved resonans er faseforskjellen nar 90° og ved frekvenser godt over resonans nærmer faseforskjellen seg 180°. Overgangen mellom disse verdiene er helt skarpe ved null dempning og glattes ut ved økende dempning. Merk at utsvinget altså alltid er faseforskjøvet slik at det i tid ligger bak eksitasjonskraften og at faseforskjellen øker med økende eksitasjonsfrekvens som rimelig er.



Figur B.2