EN LITEN INNFØRING I USIKKERHETSANALYSE (Forutsetter at tilsvarende forelesning følges.)

1. Forskjellige typer feil:

a) Definisjonsusikkerhet

Eksempel:
Tenk deg at du skal måle lengden av et noe ullent legeme, f.eks. en sau.

Botemiddel:
Legg vekt på klare og spesifiserte definisjoner.

b) Grove feil

Eksempel:
Teller feil antall meter når måler lengde med meterstokk.

Botemiddel:
Gjør dem ikke.

c) Systematiske feil

Se nedenfor.

d) Statistiske feil

Se nedenfor.

KONKLUSJON:

– Bruk sunn fornuft.

– Ikke bruk formler for statistisk usikkerhet ukritisk.

2. Systematiske feil:

Forårsakes av blant annet:

a) Feil kalibrert måleinstrument
b) Metning av måleinstrument
c) Menneskelig egenskap
d) Andre forsøksbetingelser enn antatt

Eksempel:
Meterstokk er ikke eksakt 1 m, men 0,9998 m.

Botemidler:
a) Tenk kritisk på utføring av måling.
b) Sjekk nøyaktighet og område for måleinstrument.
c) Kalibrer måleutstyr.
d) Anslå fornuftig grense for ukorrigerbare systematiske feil.

3. Statistisk usikkerhet:

Gjentatte målinger av én og samme størrelse under samme forsøksbetingelser gir forskjellige verdier.

Eksempel:
Dersom en flere ganger måler lengden på et bord (f.eks. 5 m) med meterstokk med lengde 1 m og fin gradering, vil en få ulike verdier.

Botemiddel:
Mål mange ganger og beregn middelverdien.
Variasjonen i målingene gir mål for usikkerhet som benevnes f.eks. Δx.

Eksperimentelt viser det seg at målingene blir tilnærmet normalfordelt[1] i mange tilfeller:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

der

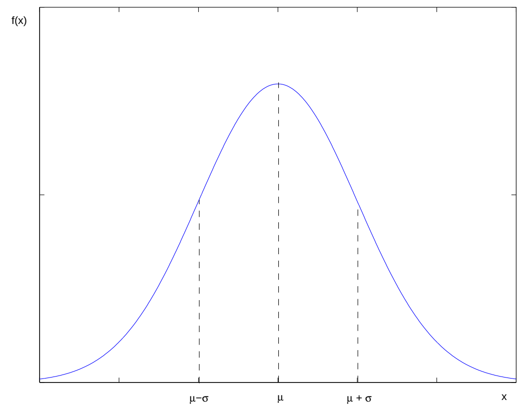
$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sannsynlighet for å måle verdien } x \\ \mu &= \text{middelverdi} \\ \sigma &= \text{standardavvik} \end{aligned}$$

Teoretisk [2] kan det vises at en får normalfordeling når det totale feilbidraget er sammensatt av uendelig mange feilbidrag som adderes uavhengig av hverandre.

Ca. 68% av målingene ligger i $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
Ca. 95% av målingene ligger i $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
Ca. 99,7% av målingene ligger i $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

(En snakker om 1σ, 2σ eller 3σ grenser.)

[1] Normalfordeling vil bli nærmere behandlet i læreboka [1] i statistikkfaget TMA4240 eller TMA4245 som de fleste først får i tredje årskurs.



Figur 1: Normalfordeling

Estimater for μ og σ:

(NB! Forutsetter tilnærmet normalfordeling.)

Estimat for middelverdi [3] μ:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2}$$

Estimat for standardavvik [3] σ = usikkerhet i enkeltmåling (1σ-grense):

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \tag{3}$$

Estimat for usikkerhet i middelverdi [3]:

$$\Delta\overline{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

Merknader:

1) $\Delta\overline{x} \to 0$ for $n \to \infty$.
(Husk at dette gjelder statistisk usikkerhet, ikke systematisk.)

2) Det ovenfor gjelder når alle målinger er like sikre. Ellers må vektfaktor nyttes.

3) Husk å skille mellom systematisk og statistisk usikkerhet, og statistisk usikkerhet i enkeltmåling og middelverdi!

4. Feilforplantning:

Vi betrakter en fysisk størrelse $f(x, y, z, \dots)$ som beregnes ut fra målinger av de fysiske størrelser $x, y, z, \dots$. Anta at x, y, z osv. er uavhengige. Da gjelder [4]:

$$\Delta f = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right)^2 + \dots \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

for tilstrekkelig små $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ osv.

I mangel av noe bedre nyttes lign.(5) også ofte for systematiske feil og for kombinasjon av systematiske og statistiske feil. For systematiske feil representerer Δx, Δy osv. anslått usikkerhet.

Det verste tilfellet (alle feil virker i samme retning) ville for små feil være:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots \tag{6}$$

Dersom en har målt middelverdier for x, y, z osv. nytter en:

$$f = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \dots) \tag{7}$$

og

$$\Delta f = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta \overline{x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta \overline{y} \right)^2 + \dots \right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

Merk at målet ikke er å bruke mest mulig formler, men å komme fram til et så forstandig anslag på usikkerhet som mulig.

Eksempel:

$f(x, y, z) = \text{konstant} \cdot \frac{x \cdot y^2}{z^3}$ gir:

$$\frac{\Delta f}{f} = \left(\left(\frac{\Delta x}{x} \right)^2 + \left(2 \frac{\Delta y}{y} \right)^2 + \left(3 \frac{\Delta z}{z} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Merk at det ofte letter regningen å nytte relative feil som f. eks. $\frac{\Delta x}{x}$.

5. Bestemmelse av rett linje ved minste kvadraters metode:

Vi tenker oss at vi har en fysisk modell som sier oss at tilsvarende målinger av x og y skal bli liggende på en rett linje:

$$y = k_1 + k_2 x \tag{9}$$

der k_1 og k_2 er fysiske konstanter vi ønsker å bestemme.

Lign.(9) kan omskrives til:

$$y = a + b(x - \overline{x}) \tag{10}$$

der

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ a &= k_1 - b\overline{x} \\ b &= k_2 \end{aligned}$$

Dersom alle målinger har samme usikkerhet, nyttes de verdier av a og b (og dermed k_1 og k_2) som minimaliserer:

$$Q \equiv \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + b(x_i - \overline{x}))]^2 \tag{11}$$

(Derav navnet minste kvadraters metode.)

Vi finner minimum for Q ved:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \tag{12}$$

og

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \tag{13}$$

som etter litt mellomregning gir:

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{14}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{15}$$

Merknader:

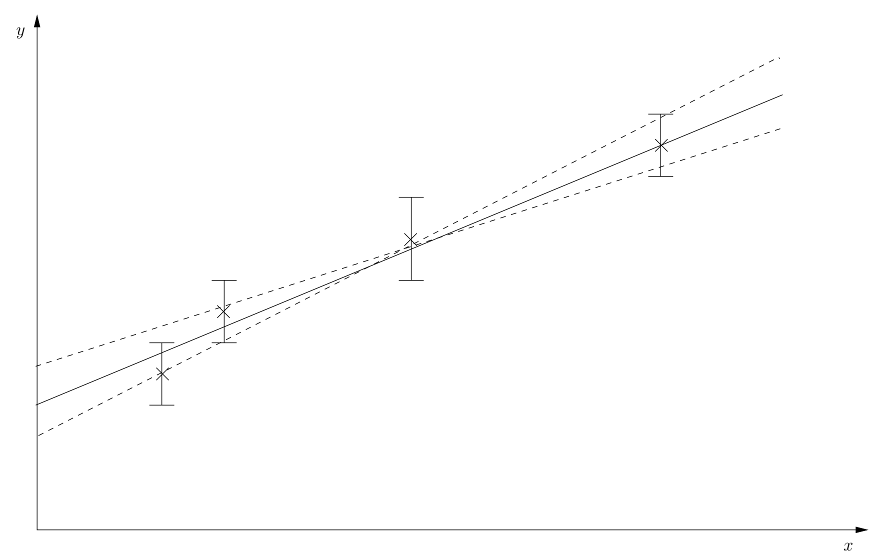
1) Dersom målepunktene har ulik usikkerhet må vektfaktorer nyttes.

2) Tilsvarende metode kan også nyttes for høyere ordens polynom dersom y er lineær i koeffesientene k_i som skal tilpasses.

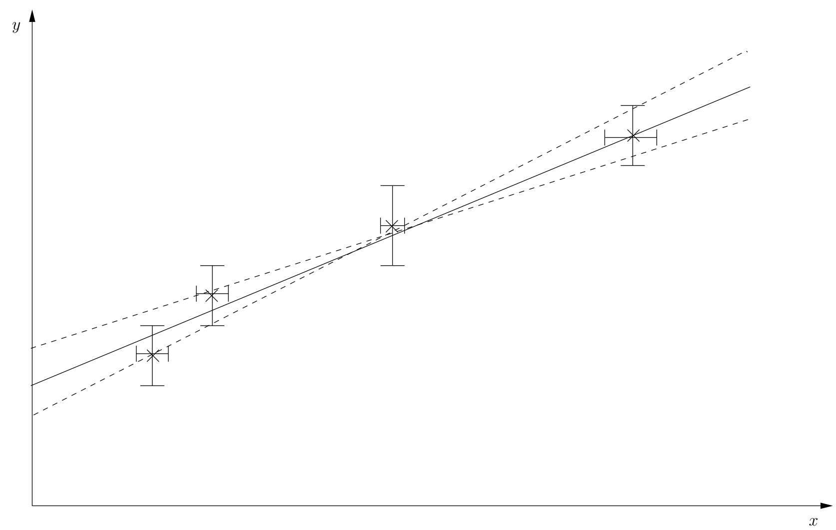
3) Et Excel-ark for innlegging av rett linje ved minste kvadraters metode (regresjon) er utlagt på hjemmesidene under menyvalget **Regresjon**. Dette Excel-arket kan og gi usikkerhet for koeffisientene k_1 og k_2 i ligning 9. Formelverk og utledning for det siste er gitt f.eks. i [5].

6. Visuell innlegging av rett linje:

Dersom den fysiske modellen er lineær i x, kan en ofte få et brukbart estimat ved visuell innlegging av en rett linje som vist i figur 2. De stiplede linjene i denne figuren representerer linjene med maksimal og minimal vinkelkoeffisient som en antar kan være mulig ut fra de eksperimentelle data. Disse gir anslag på usikkerhetene i k_1 og k_2 i ligning 9. En slik visuell innlegging kan være fordelaktig sammenlignet med regresjon dersom ulike målepunkt har ulik usikkerhet og regresjonsprogrammet ikke har mulighet for å benytte vektfaktorer, eventuelt dersom en vet at ett eller flere av målepunktene har større systematisk usikkerhet enn de andre og ikke vet hvordan dette skal kvantifiseres.



Figur 2: Illustrasjon av innlegging av rett linje visuelt.



Figur 3: Illustrasjon av innlegging av rett linje visuelt for tilfellet med usikkerhet langs begge akser.

<u>*Merknad:*</u>

Av og til kan det være vesentlig eksperimentell usikkerhet i størrelsene som plottes langs begge akser. Usikkerhetsstolper bør da anføres i begge retninger som vist på figur 3. I slike tilfelle kan det være spesielt gunstig å benytte visuell innlegg av rett linje.

Referanser

[1] R.E. Walpole, R.H. Myers, S.L. Myers and K. Ye: *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, Eight Edition, Pearson, London 2007, kapittel 6.

[2] N.C. Barford, *Experimental Measurements: Precision, Error and Truth*, Second Edition, Wiley, New York 1985, kapittel 5.

[3] R.E. Walpole et.al., op.cit.[2], kapittel 9.3.

[4] N.C. Barford, op.cit., kapittel 2.3.

[5] N.C. Barford, op.cit., kapittel 3.3.

Knut Arne Strand, 2004
Revidert 16.11.2005 KAS
Revidert 13.08.2006 LEW/KAS

[2] Op.cit. betyr sitert ovenfor.