

**Kompendium for deler av pensum i
TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk**

Høsten 2006

Forord

Dette kompendiet dekker hoveddeler av pensum i TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk og er et utdrag fra kompendier som brukes i fysikkemner for andre fakultet, undervist av Institutt for fysikk. Kompendiet er mindre grundig enn både lærebok og forelesninger og dekker heller ikke hele pensum. Bl.a. er gravitasjonsteori ikke med. Med det kan være en hjelp for noen.

Fra forord for opprinnelig kompendium:

Innholdet i det foreliggende kompendiet ligger i de fleste henseender svært nært opp til innholdet i forelesningsnotatene utarbeidd av professor Helge Skullerud i perioden 1998-2001 for emne SIF4002 Fysikk for studenter ved Studieprogram for bygg- og miljøteknikk, NTNU. Utgangspunktet for det foreliggende kompendiet og alle regneøvingene i emnet er L^AT_EX-kildekoden for dette materialet generøst overlatt til undertegnede av professor Skullerud.

For å sikre at emnets innhold er mest mulig relevant, har skiftende faglærere opp gjennom årene jamnlig oppdatert utvalget av temaer, eksempler og øvinger i samråd med det emnemiljøet som studentene tilhører.

Arnljot Elgsæter / Arne Mikkelsen

Innhold

1	Introduksjon	1
2	Newtons 2. lov	3
2.1	Bevegelse av punktmasser som påvirkes av ytre krefter	3
2.2	Kastbevegelse i homogent gravitasjonsfelt	6
2.3	Lodd hengt opp i spiralfjær	7
2.3.1	Statisk beregning	7
2.3.2	Dynamisk beregning	8
3	Arbeid og energi	11
3.1	Arbeid og kinetisk energi	11
3.2	Potensiell energi og konservative krefter	12
3.3	Ikke-konservative krefter	14
3.3.1	Vanlig tørr friksjon	14
3.3.2	Fluidfriksjon	15
3.3.3	Friksjonsarbeid	15
4	Dreiemoment og vektstangprinsipp	19
4.1	Vektstang i skålvektkonfigurasjon	19
4.2	Løfting med spett	20
4.3	Dreiemoment	21
4.3.1	Dreiemoment og arbeid	21
4.4	Tyngdepunkt og massefellespunkt	22
4.5	Statisk likevekt	22
4.5.1	Opplagret bjelke med last	23
5	Topartikkelsystemer	25
5.1	Separasjon av bevegelseslikningene	26
5.2	Elastisk støt i én dimensjon	28
5.3	Uelastisk støt i én dimensjon – ballistisk pendel	29
6	Rotasjon av stive legemer	31
6.1	Beskrivelse vha. sylinderkoordinater	31
6.1.1	Baneakselerasjon og radialakselerasjon	32
6.2	Rotasjonsenergi og treghetsmoment	33

6.2.1	Rullende ring	34
6.2.2	Rullende massivt hjul	35
6.2.3	Modellering av Galileis eksperiment	36
6.3	Parallellakse-teoremet (Steiners sats)	38
6.3.1	Alternativ beregning av kinetisk energi for rullende hjul	38
6.4	Spinn for punktmasse	39
6.5	Spinnet for stivt legeme	40
6.5.1	Gyroskop	41
6.5.2	Bumerang	43
7	Periodisk bevegelse	45
7.1	Masse og fjær	46
7.2	Uniform rotasjon	46
7.3	Torsjonssvingninger	48
7.4	Matematisk pendel	50
7.5	Fysisk pendel	52
7.5.1	Tynn, homogen stav	53
7.6	Dempete svingninger	53
7.6.1	Løsning ved svak demping	54
7.6.2	Klassifisering etter dempningsgrad	56
7.7	Tvungne svingninger og resonans	56
A	Fysiske og matematiske grunnprinsipp	60
A.1	Størrelser og enheter	60
A.2	Litt grunnleggende matematikk	61
A.3	Separasjon av sammensatte problem	63

Kapittel 1

Introduksjon

Vi skal i dette kapitlet gi ei kort oversikt over hva kurset omfatter og hva som kreves av forkunnskaper.

Fra innholdslista vil man se at dette kurset spenner over emner som arbeid, energi, partikkeldynamikk, hydrostatikk, fluidmekanikk, mekaniske bølger, termisk fysikk, kinetisk teori og termodynamiske kretsprosesser. Dette kan ved første øyekast se ut som temaer som har lite eller ingenting felles, men dette viser seg ikke å være riktig. Den underliggende fellesnevneren for alle disse temaene er *Newtons mekanikk* for masser som er så små at man kan se bort fra effekter som skyldes massenes utstrekning. Slike masser refereres til som massepunkter eller *punktmasser*. I de tilfeller hvor man ønsker å studere fluider eller faste legemer med utstrekning, modellerer man de aktuelle systemene som ei samling av et større eller mindre antall *vekselvirkende punktmasser*.

Newtons mekanikk (1686) bygger på Newtons¹ bevegelseslikning publisert i “Principia”.

Einsteins spesielle relativitetsteori (1905) skiller seg fra Newtons mekanikk kun når partikkelhastigheten blir en signifikant brøkdel av lyshastigheten, $c = 300\,000$ km/s.

Heisenberg og Schrödingers kvantemekanikk (1924) beskriver de spesielle fysiske egenskapene som begynner å dominere når ved termisk likevekt massen til punktmassene er av samme størrelsesorden som massen til et hydrogenatom, eller mindre.

Hawkins (1980) beskrev hvordan alle kjente fysiske lover mister sin gyldighet i nærheten av svarte hull (“uendelig” stor masse med “null” utstrekning).

Vi vil her *ikke* befatte oss med tre sistnevnte spesialtilfellene, og vil kun betrakte

¹Sir Isaac Newton (1642(43)-1727), engelsk fysiker og matematiker. Den største vitenskapsmann i 17. århundre med spesialområder mekanikk, optikk og infinitesimalregning. Boka “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” regnes av mange som ei av de aller viktigste i vitenskapens historie.

objekter som A) har stor nok masse, B) beveger seg langsomt nok og C) befinner seg langt nok bort fra svarte hull til at Newtons mekanikk er gyldig. Dette innbefatter i praksis de aller fleste systemer av interesse innen ingeniørvitenskap – inklusive makroskopiske egenskaper som varmekapasitet og trykk ved gitt volum og temperatur for de fleste atomære og molekylære gasser.

Det er ellers viktig å legge merke til at *fysikkens "språk" er matematikk* – samtidig som matematikk også er et av fysikkens viktigste verktøy. Isaac Newton måtte i en alder av 22-23 år bokstavelig talt "finne opp" integral- og differensialregning for å kunne beregne planetbanene rundt sola. For å ha størst mulig utbytte av de foreliggende fysikknotatene, er det derfor desto bedre jo "mer flytende man snakker matematikk". Ved eventuelle vansker er det derfor nyttig først å få avklart om det dreier seg om kun et "språkproblem" (matematikkproblem) – eller om det er selve fysikken som volder vansker. Erfaring viser at i førsteårskurs fysikkemner bunner studentenes problemer seg for en stor del i "språkproblemer". Det er derfor å anbefale at studentene underveis i dette kurset stadig frisker opp det som de alt har fått gjennomgått i matematikk.

OPPSUMMERING AV KAP. 1

- Newtons 2. lov er gyldig for alle systemer hvor A) Hastigheten er mye mindre enn lyshastigheten, og B) Massen er endelig og større enn hydrogenatomets masse. For systemer bestående av sterkt vekselvirkende punktmasser (f.eks. faste legemer og fluider) vil det ofte være nyttig å innføre andre koordinater enn de som brukes for frie punktmasser.

Kapittel 2

Newton's 2. lov

Vi skal i dette kapitlet gjøre rede for Newtons 2. lov og se på et par eksempler.

2.1 Bevegelse av punktmasser som påvirkes av ytre krefter

Vår grunnlikning – som nesten all annen mekanikk kan utledes fra – er *Newton's 2. lov*, som på komponentform kan skrives

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= F_x(x, y, z, t), \\ \frac{dp_y}{dt} &= F_y(x, y, z, t), \\ \frac{dp_z}{dt} &= F_z(x, y, z, t), \end{aligned} \tag{2-1}$$

eller på vektorform

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t), \tag{2-2}$$

hvor

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}} &= \{x, y, z\} = \text{punktmassens posisjonsvektor,} \\ m &= \text{massen} \end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{p}} = \{p_x, p_y, p_z\} = m \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = m \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \text{bevegelsesmengden}, \quad (2-3)$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \{v_x, v_y, v_z\} = \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{r}} = \text{hastigheten},$$

t = tid og

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \{F_x(\vec{\mathbf{r}}, t), F_y(\vec{\mathbf{r}}, t), F_z(\vec{\mathbf{r}}, t)\} = \text{ytre kraft}. \quad (2-4)$$

Vi definerer også punktmassens akselerasjon $\vec{\mathbf{a}}$ gitt ved uttrykket

$$\vec{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\} = \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{\mathbf{r}} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{1}{m} \dot{\vec{\mathbf{p}}}. \quad (2-5)$$

Fra Newtons 2. lov følger at krafta er *en avleddet størrelse* $\vec{\mathbf{F}} = m \vec{\mathbf{a}}$ med enhet (dimensjon)

$$[\vec{\mathbf{F}}] = [m] \cdot [\vec{\mathbf{a}}] = \text{kilogram} \cdot \frac{\text{meter}}{\text{sekund}^2} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}. \quad (2-6)$$

Denne enheten defineres 1 *newton*:

$$\text{newton} = \text{N} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}.$$

Newtons 2. lov kan alternativt skrives som

$$\frac{d}{dt} [m(t) \dot{\vec{\mathbf{r}}}] = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t). \quad (2-7)$$

I det følgende vil vi kun befatte oss med systemer hvor *massen er tidsuavhengig*, men f.eks. for en rakett vil totalmassen reduseres etter hvert som raketts drivstoff forbrennes, dvs. rakettmassen vil være en funksjon av tida.

For tidsuavhengig masse, dvs. $m(t) = m = \text{konstant}$, kan Newtons 2. lov skrives

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{1}{m} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t), \quad (2-8)$$

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = m \vec{\mathbf{a}}. \quad (2-9)$$

Likning (2-8) kan brukes til å beregne akselerasjonen når den ytre krafta er gitt, mens likning (2-9) kan brukes til å beregne den ytre krafta når akselerasjonen er gitt. Mens Newtons 2. lov (2-8) forteller hvor stor akselerasjon et legeme får når det påvirkes av en kraft, er *Newtons 1. lov* et spesialtilfelle av denne: Når ingen krefter virker på et legeme (i praksis: summen av alle krefter lik null), endres ikke hastigheten til et legeme. Dersom det er i ro forblir det i ro.

Kjært barn har, som kjent, mange navn. Slik er det også for Newtons mekanikk:

	norsk	engelsk
$\vec{p} = m \vec{v}$	bevegelsesmengde, driv, impuls	momentum
$d\vec{p} = \vec{F} dt$	kraftstøt, impuls, impulsforandring	impulse

For tidsuavhengige masser ($m = \text{konstant}$) har man i det generelle tilfellet bevegelseslikningene

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F_x(x, y, z, t), \\
 \ddot{y} &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{m} F_y(x, y, z, t), \\
 \ddot{z} &= \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{m} F_z(x, y, z, t),
 \end{aligned} \tag{2-10}$$

hvor akselerasjonen i f.eks. x -retning i det generelle tilfellet vil kunne avhenge av verdien til alle de tre komponentene til punktmassens posisjonsvektor $\vec{r} = \{x, y, z\}$. Dette gir *tre koplede andreordens differensiallikninger* for å bestemme de *tre ukjente* x , y og z når de matematisk uttrykkene for $F_x(x, y, z, t)$, $F_y(x, y, z, t)$ og $F_z(x, y, z, t)$ er kjente. Bevegelsen av en planet rundt sola er et eksempel på et slikt system. I mange tilfeller er det ikke trivielt å løse de tre koplede differensiallikningene i (2-10). F.eks. er planetbanene rundt sola ellipser hvor sola befinner seg i det ene brennpunktet.

Viktig spesialtilfelle når krafta i hver retning ikke er avhengig av andre retninger:

$$F_x(x, y, z, t) = F_x(x, t), \tag{2-11}$$

$$F_y(x, y, z, t) = F_y(y, t), \tag{2-12}$$

$$F_z(x, y, z, t) = F_z(z, t), \tag{2-13}$$

med bevegelseslikningene

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F_x(x, t), \quad \ddot{y} = \frac{1}{m} F_y(y, t), \quad \ddot{z} = \frac{1}{m} F_z(z, t), \tag{2-14}$$

hvor *komponentene av bevegelsen langs hver koordinatakse er uavhengig av komponentene til bevegelsen langs de øvrige koordinataksene*. Det vil si at man først kan beregne komponentene av bevegelsen langs de tre aksene hver for seg som om bevegelsen langs de andre aksene ikke fant sted, og så til slutt summere/superposisjonere bevegelsene. Dette refereres gjerne som *superposisjonsprinsippet*.

Når superposisjonsprinsippet kan benyttes, fører dette som oftest til sterk forenkling av selve beregningene. Hvor vidt surperposisjonsprinsippet kan benyttes for et gitt system, avhenger ofte av orienteringa av "laboratoriekoordinatsystemet". I praksis er det slik at hvor mye regnearbeid som trengs for å løse en gitt oppgave,

ofte er sterkt avhengig av både lokaliseringa av origo og orienteringa av laboratoriekoordinatsystemet. Normalt lønner det seg derfor å prøve seg litt fram før man plasserer et systems laboratoriekoordinatsystem. Dette er et typisk eksempel på en arbeidsoppgave hvor øvelse – mer enn noe annet – gjør mester.

2.2 Kastbevegelse i homogent gravitasjonsfelt

Gitt at den ytre krafta på punktmassen er¹

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \{0, 0, -mg\}. \quad (2-15)$$

Parameter g kalles “tyngdens akselerasjon” og er konstant i et homogent gravitasjonsfelt. Denne parameteren har blitt gitt dette navnet fordi

$$[g] = \frac{[F_z]}{[m]} = \frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad (2-16)$$

dvs. g har dimensjon akselerasjon. Legg merke til at m betyr meter, mens symbolet for masse er m . Videre ser vi fra likn. (2-16) at for en punktmasse er $a_z = -g$. Ved havnivå finner man at $g \simeq 9,82 \text{ m/s}^2$.

Vektorkomponenten til partikkelhastigheten kan for dette spesialtilfellet finnes enkelt ved integrasjon fordi akselerasjonen er konstant:

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t \frac{dv_x}{dt} dt = v_x(0) + \int_0^t \frac{1}{m} F_x dt = v_x(0), \quad (2-17)$$

$$v_y(t) = v_y(0) + \int_0^t \frac{dv_y}{dt} dt = v_y(0) + \int_0^t \frac{1}{m} F_y dt = v_y(0), \quad (2-18)$$

$$v_z(t) = v_z(0) + \int_0^t \frac{dv_z}{dt} dt = v_z(0) + \int_0^t \frac{1}{m} F_z dt = v_z(0) - g t. \quad (2-19)$$

Vi har videre at

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt, \quad (2-20)$$

som sammen med likningene (2-17) – (2-19) gir følgende sett med bevegelseslikninger

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + v_x(0) t, \\ y(t) &= y(0) + v_y(0) t, \\ z(t) &= z(0) + v_z(0) t - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \quad (2-21)$$

¹Merk at alle ledd i $\{ \dots \}$ skal ha samme enhet (dimensjon). Siden “0” ikke har dimensjon er en formelt riktigere måte å skrive dette på: $\vec{F} = \{0 \text{ N}, 0 \text{ N}, -mg\}$. Men når måltallet er lik null tillater selv de mest formelle fysikere å sløyfe enheten, den er underforstått. Dette gjelder også i uttrykk som $v_x(0)$, f.eks. i likning (2-17).

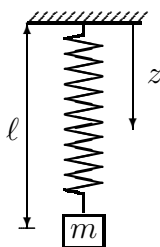
Man legger her merke til at partikkelbevegelsen ikke overraskende avhenger både av hvor partikkelen befinner seg og hvilken hastighet den har ved tida $t = 0$.

Anta at vi har en kastbevegelse hvor partikkelen befinner seg i origo ved tida $t = 0$, at det ikke er noen bevegelse i y -retning, dvs. $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ og² at $v_y = 0$. Ved å eliminere t fra likningene (2-21) finner man følgende likning for partikkelbanen

$$z = \frac{v_z(0)}{v_x(0)} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_x^2(0)} x^2, \quad (2-22)$$

dvs. banene til partikkelen er en parabel som ligger i planet gjennom x - og z -aksene.

2.3 Lodd hengt opp i spiralfjær



Ei spiralfjær med fjærkonstant k og lengde ℓ_0 når den er ubelastet, henges opp vertikalt. Fjæra belastes deretter med et lodd med masse m slik at fjærlengden blir ℓ . Massen til fjæra kan neglisjeres. Systemet befinner seg i et homogent gravitasjonfelt med tyngdeakselerasjon g .

2.3.1 Statisk beregning

For å få enklest mulig algebra velger vi å benytte et koordinatsystem med z -akse parallelt med og retta med tyngdekrafta. Koordinatsystemet plasseres slik at $z = 0$ ved toppfestet og posisjonsvektoren til nedre ende av fjæra er $\vec{r} = \{0, 0, z_0\}$ når fjæra er ubelastet.

Lokaliseringa og orienteringa av koordinatsystemet som benyttes, har ingenting å si for det endelige resultatet av beregningene. Men, hvor mye arbeid som kreves for å komme fram til svaret, avhenger ofte sterkt av hvor man plasserer koordinatsystemet og hvordan det orienteres. Er man dum nok til f.eks. å orientere koordinatsystemet skrått i forhold til tyngdekrafta, blir uttrykkene unødige stygge.

Vi antar at fjærkrafta $F^{(\text{fjær})}$ følger Hookes lov, dvs.

$$F_x^{(\text{fjær})} = 0 \quad F_y^{(\text{fjær})} = 0 \quad F_z^{(\text{fjær})} = -k(\ell - \ell_0) = -k(z - z_0), \quad (2-23)$$

hvor k er fjærkonstanten. Vi setter minustegn foran krafta fordi den virker i negativ z -retning når $z > z_0$. Den totale ytre krafta $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ på loddet blir da

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = F_z^{(\text{fjær})} + F_z^{(\text{tyngde})} = -k(z - z_0) + mg. \quad (2-24)$$

²Legg her merke til at fordi x og v_x har forskjellig dimensjon, har vi ikke satt de like selv om de begge er lik null.

Akselerasjonen av loddet er gitt av Newtons 2. lov og dermed av uttrykket

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \vec{F} = \frac{1}{m} \{0, 0, -k(z - z_0) + mg\}. \quad (2-25)$$

Loddet henger i ro (statisk likevekt) hvis $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$ og $\dot{\vec{r}} = \vec{0}$. For dette viktige spesialtilfellet gir Newtons 2. lov at

$$\vec{F} = \{0, 0, F_z^{(\text{fjær})} + F_z^{(\text{tyngde})}\} = \vec{0}. \quad (2-26)$$

Viktig resultat: *I statisk likevekt er akselerasjonen lik null. Fra Newtons 2. lov følger derfor at for dette spesielle tilfellet er summen av alle de ytre kreftene lik null.*

Et lodd opphengt i spiralfjær faller derfor til ro ved

$$\Delta\ell = (z - z_0) = \frac{mg}{k}. \quad (2-27)$$

2.3.2 Dynamisk beregning

Fra likning (2-23) ser man at $F_x = F_y = 0$ og at det i følge Newtons 2. lov derfor ikke er noen akselerasjon i x - og y -retning. Hvis hastighetene $v_x = v_y = 0$ ved tida $t = 0$, vil det derfor ikke være noen bevegelse i x - og y -retning.

Før loddet faller til ro vil man fra bevegelseslikninga (2-25) for z -retninga finne

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} F_z = \frac{1}{m} [-k(z - z_0) + mg], \quad (2-28)$$

som gir følgende differensiallikning av andre orden med konstante koeffisienter til å bestemme tidsavhengigheten til den ene ukjente størrelsen $z(t)$

$$\ddot{z}(t) + \frac{k}{m} (z(t) - z_0) - g = 0. \quad (2-29)$$

De viktigste alternative måtene å finne den analytiske løsningen til ei gitt differensiallikning – hvis en analytisk løsning i det hele eksisterer – er:

A. Slå opp i ei lærebok eller et av de mange referanseverk som lister opp den analytiske løsningen for de aller fleste av de mest vanlig forekommende differensiallikninger.

B. Kontakt en matematiker eller noen andre med den nødvendige kompetanse.

C. Hvis man kjenner et fysisk system som er beskrevet av differensiallikninga, vil man ofte ved enkel observasjon kunne erverve ei viss formening om hva dynamikken til systemet er. Hvis systemet f.eks. svinger opp og ned når man gir det en kakk slik at systemet kommer ut av statisk likevekt, består ofte løsningen av mer eller mindre dempede harmoniske (sinus og cosinus) svingninger. Dette kan så benyttes til å sette opp en såkalt prøveløsning (gjettet løsning) som så settes inn i likninga

for å se hva som må til av tilpasninger for at prøveløsningen skal være en løsning av differensiallikninga.

D. Man kan selv prøve å integrere differensiallikninga analytisk.

I en arbeidslivssituasjon er alternativene A eller B nesten alltid det beste valg. Ofte vil man også kunne komme opp i den situasjonen at det ikke finnes noen analytisk løsning. I slike tilfeller må man ty til datamaskinbaserte (numeriske) løsningsmetoder.

Likning (2-29) hører til en klasse differensiallikninger som er godt kjent og som dere etter hvert vil stifte bekjentskap med i mange sammenhenger. Her skal vi derfor kun sette opp svaret og vise at det er en løsning av likning (2-29).

For å få likning (2-29) på en enklere form innfører vi en ny variabel ξ (gresk bokstav som uttales "ksi") som er lik utsvinget fra den statiske likevektsverdien

$$\xi = z - (z_0 + \Delta\ell). \quad (2-30)$$

Dette gir

$$\ddot{z} = \ddot{\xi} \quad \text{og} \quad z - z_0 = \xi + \Delta\ell = \xi + mg/k,$$

som innsatt i likning (2-29) gir

$$\ddot{\xi}(t) + \frac{k}{m}\xi(t) = 0. \quad (2-31)$$

Ved prøving ser man at den generelle løsningen til denne likninga er

$$\xi(t) = C_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad (2-32)$$

hvor C_1 og C_2 er integrasjonskonstanter som bestemmes av massens posisjon og hastighet ved tida $t = 0$. Dette er rene *harmoniske svingninger* med periode (svingetid)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta\ell}{g}}, \quad (2-33)$$

hvor man i den siste overgangen har benyttet at $\Delta\ell = mg/k$. Dess mindre massen er og dess stivere fjæra er, jo kortere er svingetida.

OPPSUMMERING AV KAP. 2

- Newtons 2. lov er grunnlikninga som nesten all mekanikk kan utledes fra:
$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = m \vec{\mathbf{a}}.$$
- *Bevegelsesmengden*(impulsen) for en punktmasse er lik *masse · hastighet*.
- Newtons 2. lov gir at *impulsforandringa* er lik *kraft · tid*.
- Newtons 1. lov er et spesialtilfelle av Newtons 2. lov, når $\Sigma \vec{\mathbf{F}} = 0$.
- Banen til en kastbevegelse avtegner deler av en parabel.
- Den dynamiske bevegelsen til en friksjonsfri masse koplet til ei fjær er harmonisk.

Kapittel 3

Arbeid og energi

Vi skal i dette kapitlet gjøre rede for begrepene arbeid, kinetisk og potensiell energi, og konservative- og ikke-konservative krefter. Vi vil også se på hva som kjennetegner henholdsvis stabile, ustabile og labile likevekter.

3.1 Arbeid og kinetisk energi

Begrepene *arbeid* og *energi* ble definert matematisk først i ca. år 1800, av Thomas Young, dvs. mer enn 100 år etter Newtons Principia. Newton – og Galilei – nøyde seg med å betrakte størrelsen bevegelsesmengde.

Vi definerer arbeid W som

$$\text{arbeid} = (\text{kraft}) \cdot (\text{vei i kraftas retning}) \quad (3-1)$$

dvs. at når utgått vei settes lik $d\vec{s}$, får man at

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} . \quad (3-2)$$

Innsetting av $\vec{F} = m d\vec{v} / dt$ fra Newtons 2. lov gir

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot (\vec{v} dt) = m d\vec{v} \cdot \vec{v} = d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right), \quad (3-3)$$

hvor vi har brukt at $d(v^2) = d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = 2(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) \equiv 2 \vec{v} \cdot d\vec{v}$. For arbeid utført på en punktmasse med masse m fås dermed

$$dW = d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \quad \text{Arbeid på punktmassen.} \quad (3-4)$$

Uttrykket i parentes til høyre er *den kinetiske energien* til punktmassen,

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{Punktmassens kinetisk energi.} \quad (3-5)$$

3.2 Potensiell energi og konservative krefter

La oss betrakte noen velkjente typer krefter \vec{F} , og tilhørende arbeid $\vec{F} \cdot d\vec{s}$:

$$\begin{array}{lll} \text{Fjærkraft:} & F = -kx & dW = -kx dx = -\frac{1}{2}d(kx^2) \\ \text{Tyngdekraft:} & F = -mg & dW = -mg dh = -d(mgh) \\ \text{Gravitasjon:} & F = -Gm_1m_2/R^2 & dW = -Gm_1m_2 dR/R^2 = +d(Gm_1m_2/R) \end{array}$$

For alle tre tilfellene kan arbeidet uttrykkes som forandring i en størrelse *som bare avhenger av posisjonen*, og som vi vil kalle *potensiell energi* eller *kraftpotensial* $V(\vec{r})$:

$$\begin{array}{lll} \text{Fjær:} & V(x) = k \frac{1}{2}x^2 & \vec{F} = (-dV/dx) \hat{e}_x \\ \text{Tyngdefelt:} & V(h) = mgh & \vec{F} = (-dV/dh) \hat{e}_h \\ \text{Gravitasjon:} & V(R) = -Gm_1m_2/R & \vec{F} = (-dV/dR) \hat{e}_R, \end{array}$$

hvor \hat{e}_x , \hat{e}_h og \hat{e}_R er enhetsvektorene langs henholdsvis x , h og R . Kraftene gitt i de tre eksemplene ovenfor, kan avledes av et kraftpotensial $V(\vec{r})$ som i tre dimensjoner med $\vec{r} = \{x, y, z\}$ formelt kan uttrykkes som

$$\vec{F} = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \hat{e}_x - \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \hat{e}_y - \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \hat{e}_z = -\nabla V(\vec{r}), \quad (3-6)$$

hvor \hat{e}_x , \hat{e}_y og \hat{e}_z er enhetsvektoren langs henholdsvis x -, y - og z -aksen. Slike krefter kalles *konservative krefter*.

Den partiellderiverte er definert slik at

$$\left. \frac{dV(x, y, z, t)}{dx} \right|_{y, z, t = \text{konst}} = \frac{\partial V(x, y, z, t)}{\partial x}. \quad (3-7)$$

Ved statisk likevekt er den konservative krafta lik null, hvilket svarer til minimum i den potensielle energien, fordi $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}) = \vec{0}$.

Kraftpotensialet i likn. (3-6) satt inn i Newtons 2. lov (2-9) gir

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} + \nabla V(\vec{r}) = \vec{0}. \quad (3-8)$$

Uttrykket $\nabla V(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ bør være kjent fra matematikken som den retningsderiverte, dvs. endring dV av V i retningen $d\vec{r}$. Med en forflytning $d\vec{r}$ i tida dt vil da

$\nabla V(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dV(\vec{r})}{dt}$. Ved å multiplisere likn. (3-8) med $\frac{d\vec{r}}{dt}$ får vi da ved å bruke siste del av likn. (3-3) med $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ at

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V(\vec{r}) \right) = 0, \quad (3-9)$$

som betyr at

$$\frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V(\vec{r}) = \text{total energi} = \text{konstant} \quad (3-10)$$

under bevegelsen av punktmassen. *Dette er et meget viktig resultat.*

Hvis begynnelsenergi og begynnelsesposisjon er gitt, kan derfor den kinetiske energien i en hvilken som helst posisjon bestemmes fra kjennskap til potensialet, uten at man trenger å løse bevegelseslikningene.

Legg ellers merke til at for et hvert “rimelig glatt” potensial gir Taylor-rekkeutvikling at følgende uttrykk

$$V(x) = V(x_0) + \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (3-11)$$

er en god tilnærmelse for små verdier av $(x - x_0)$. Desto mindre $(x - x_0)$ er, jo bedre er tilnærmelsen. Når

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_0} = 0, \quad (3-12)$$

betyr det at potensialet enten har et minimum eller et maksimum for $x = x_0$.

Når likning (3-12) er oppfylt, kan potensialet for små utslag om likevekt uttrykkes som

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (3-13)$$

Verdien $x = x_0$ svarer til et minimum i potensialet hvis $k > 0$ og et maksimum i potensialet hvis $k < 0$, hvor

$$k = \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0}. \quad (3-14)$$

Dette medfører at $k > 0$ og $k < 0$ svarer til henholdsvis ei stabil likevekt og ei labil (ustabil) likevekt for $x = x_0$. Likning (3-13) har samme matematiske form som potensialet for ei fjær med fjærkonstant k .

Likning (3-13) viser også at for alle friksjonsfrie systemer er svingningene om ei stabil likevekt harmoniske og beskrevet av likning (2-29) forutsatt at amplituden til utsvingene er tilstrekkelig små.

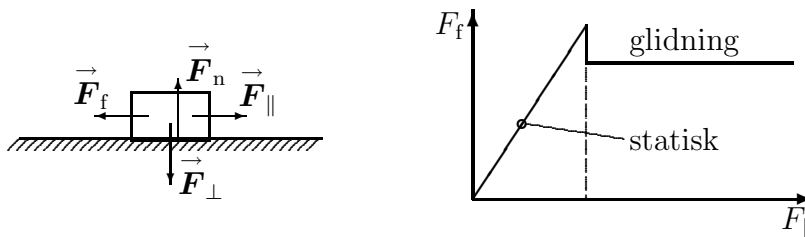
Hvis $V(x) = \text{konstant}$, er både den første- og andrederiverte av potensialet lik null. I dette tilfellet har man likevekt (indifferent likevekt) for alle mulig verdier av x . Dette svarer til situasjonen hvor ei kule er plassert på et horisontalt plan hvor gravitasjonskreftene er vertikale.

3.3 Ikke-konservative krefter

Ikke-konservative krefter er krefter som *ikke* kan avledes (assosieres) med kraftpotensial. Arbeidet som utføres av slike krefter, er ikke bare avhengig av begynnelses- og slutt punkt, men også av veien som følges. I Newtonsk mekanikk er *friksjonskrefter* de typiske ikke-konservative krefter.¹ Arbeidet som utføres av friksjonskrefter, fører til *oppvarming* – og regnes i Newtons mekanikken som “tapt”. At også varme er en form for mekanisk energi, ble først vist kvantitativt av James P. Joule². Vi kommer tilbake til det seinere.

Studiet av friksjon – tribologi – er en egen vitenskap, med svært mange spesialtilfeller. Vi skal her ta med bare et par av de enkleste: Vanlig “tørr friksjon” (mellom et legeme og et plant og tørt underlag) og enkel “fluidfriksjon” (mellom et legeme og en gass eller væske – typisk luftmotstand eller friksjon mellom oljesmurte maskindeler).

3.3.1 Vanlig tørr friksjon



Betrakt en kloss som ligger på et plant underlag, og trykkes mot underlaget med ei kraft F_\perp (som *kan* være tyngdekrafta, eller en komponent av denne, hvis underlaget er skrått). Den trekkes langs underlaget med ei ytre kraft F_\parallel (som også *kan* være en komponent av tyngdekrafta), og holdes igjen av ei friksjonskraft F_f som peker i motsatt retning. Normalkrafta F_n virker fra underlaget og er motsatt lik F_\perp .

Så lenge krafta F_\parallel er lita nok, blir klossen liggende i ro. Den totale akselererende krafta på klossen er dermed lik null, og $F_f = -F_\parallel$. Når F_\parallel økes, begynner *plutselig* klossen å gli – ved en verdi av F_\parallel proporsjonal med krafta fra underlaget F_n , og friksjonskrafta faller litt.

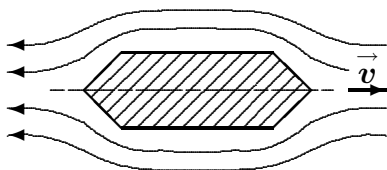
$$\begin{aligned} \text{Statisk friksjon:} & \quad F_f = \mu_s F_n \quad \text{og} \quad |F_f| = |F_\parallel| \\ \text{Glidende friksjon:} & \quad F_f = \mu_k F_n \end{aligned} \tag{3-15}$$

hvor μ_s er den *statiske* og μ_k den *kinetiske* (eller glidende) friksjonskoeffisienten. Det vil alltid gjelde at $\mu_k \leq \mu_s$, som vi bl.a. nyttiggjør oss av ved klassisk skigang.

¹I elektromagnetisme, termisk fysikk og relativistisk mekanikk opptrer også andre ikke-konservative krefter.

²James P. Joule 1818-1889, engelsk fysiker.

3.3.2 Fluidfriksjon



Et legeme beveger seg med hastighet \vec{v} i ei væske eller gass (et fluid), med lav nok hastighet til at strømminga rundt legemet er laminær uten virvler som kommer og går (turbulens).

Friksjonskrafta – som reduserer \vec{v} – er da proporsjonal med \vec{v} ,

$$\vec{F}_f = -k_f \vec{v}, \quad \text{hvor } k_f \text{ er en positiv konstant.} \quad (3-16)$$

3.3.3 Friksjonsarbeid

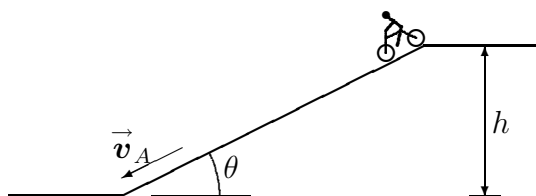
Når et legeme beveger seg en strekning $d\vec{s}$ og det er friksjon, gjør friksjonskrafta F_f et arbeid

$$W_f = \int \vec{F}_f \cdot d\vec{s}.$$

Dette arbeidet er alltid negativt da \vec{F}_f og forflytningen $d\vec{s}$ alltid peker i motsatt retning. Friksjonen tapper derfor legemet for energi, og energilikningen (3-9) må revideres. Totalenergien reduseres:

$$d\left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V(\vec{r})\right) = W_f. \quad (3-17)$$

EKSEMPEL: Syklist i bratt bakke (Fra eksamen i fysikk/forkurs 8.1.99)



En syklist med masse m setter utfor en bakke, med høyde h og helningsvinkel θ – uten hverken å tråkke eller bremse. Hva blir hastigheten v_A ved bunnen av bakken? Og hvor lang tid t_A tar det å komme seg ned bakken?

Etter krasj og sykehusopphold prøver syklisten seg igjen i samme bakke. Men nå bremses han – klokere av skade – alt han kan, med ei konstant bremsekraft på 300 N. Hva blir denne gangen hastigheten v_B og tida t_B ?

Se bort fra luftmotstanden. Sett inn tallverdier: $m = 80$ kg, $h = 20$ m, $\theta = 30^\circ$.

Løsningsforslag:

Det første man bør gjøre når man står overfor en slik oppgave, er å bestemme det

minste antall parametere (frihetsgrader) som er nødvendig for å beskrive de egenskapene til systemet som vi er interesserte i. Dette er blant annet viktig fordi *antall uavhengige likninger som man må gjøre seg bruk av, er lik antallet frihetsgrader som systemet har*. Videre er det alltid lurt og tenke seg litt om før man bestemmer seg for hvor man skal plassere og orientere det koordinatsystemet som man ønsker å benytte. Det siste valget har ofte stor innvirkning på hvor kompliserte selve beregningene blir.

I og med at all bevegelse av interesse foregår langs ei rett linje, står vi her overfor et system med kun en frihetsgrad. Det vil si at vi kun trenger ei likning for å løse oppgaven. Hvis vi legger vårt lokale koordinatsystem med origo akkurat i toppen av bakken og med x -aksen langs bakken, vil x fullt ut beskrive syklistens bevegelse. Hastigheten det spørres om i oppgaven, vil da være den tidsderiverte av x i bunnen av bakken.

I praksis har vi to likninger å velge mellom når vi nå skal besvare oppgaven: 1) Newtons 2. lov og 2) Likninga som holder regnskap med energiforbruket (energikonserveringslikninga). Vi vil her for illustrasjonens skyld bruke begge de to alternative metodene til å besvare oppgaven.

1) Fra teksten foran finner vi at den ytre krafta og dermed akselerasjonen er konstant. I det følgende angir indeks A størrelser uten friksjon og B størrelser med friksjon. Hastigheten i bunnen av bakken er lik henholdsvis

$$v_A = a_A t_A \quad v_B = a_B t_B \quad (3-18)$$

Videre har vi at

$$L = \frac{1}{2} a_A t_A^2 \quad L = \frac{1}{2} a_B t_B^2, \quad (3-19)$$

$$t_A = \sqrt{2L/a_A} \quad t_B = \sqrt{2L/a_B}, \quad (3-20)$$

hvor bakkens lengde $L = h/\sin \theta$. Newtons 2. lov gir at

$$a_A = F_g/m \quad a_B = (F_g - F_f)/m, \quad (3-21)$$

hvor komponenten av gravitasjonskrafta langs bakken er gitt som $F_g = mg \sin \theta$ og F_f er friksjonskrafta. Ved å benytte de siste uttrykkene for akselerasjonen finner man følgende svar på oppgaven:

$$\underline{v_A = \sqrt{2gh}} \quad \underline{v_B = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{1 - \frac{F_f}{mg \sin \theta}}} \quad (3-22)$$

$$\underline{t_A = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad \underline{t_B = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - F_f/mg \sin \theta}}} \quad (3-23)$$

Innsetting av tallverdier $m = 80$ kg, $h = 20$ m, $\theta = 30^\circ$, $g \simeq 10$ m/s² og $F_f = 300$ N gir

$$\underline{v_A = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/time}} \quad \underline{v_B = 10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/time}} \quad (3-24)$$

$$\underline{t_A = 4,0 \text{ s}} \quad \underline{t_B = 8,0 \text{ s}} \quad (3-25)$$

2) Ved bruk av energikonserveringslikninga får man direkte at

$$W_k + V = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (3-26)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v_A = \sqrt{2gh}}. \quad (3-27)$$

Tida t kan vi finne hvis vi kjenner middelhastigheten \bar{v} og lengden L ; $L = \bar{v}t$. Fordi vi har konstant akselerasjon, fra $v = 0$, må middelhastigheten være halvparten av topphastigheten. Vi har derfor

$$\underline{t_A = \frac{L}{\bar{v}_A} = \frac{h/\sin\theta}{v_A/2} = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}}. \quad (3-28)$$

Når man har friksjon, går noe av energien tapt til varme pga. friksjonsarbeid $F_f s$. Endring i energi (før – etter) er lik friksjonsarbeidet, som kan formuleres:

$$d(W_k + V) = \int F_f ds \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{F_f h}{\sin\theta} \quad (3-29)$$

$$v_B = \underline{\sqrt{2gh} \cdot \sqrt{1 - \frac{F_f}{mg \sin\theta}}} \quad (3-30)$$

$$\underline{t_B = \frac{L}{\bar{v}_B} = \frac{h/\sin\theta}{v_B/2} = \frac{1}{\sin\theta} \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{1}{1 - F_f/(mg \sin\theta)}}} \quad (3-31)$$

En ser at løsningen som baserte seg på prinsippet om energibevarelse i dette tilfellet var noe enklere, men for å komme fram måtte vi benytte oss av et uttrykk for middelverdien som bare kunne oppnås ved bruk av Newtons 2. lov.

OPPSUMMERING AV KAP. 3

- *Arbeid* = (kraft)·(utgått vei i kraftas retning), dvs. $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$.
- At noe “innholder” *energi*, vil si at dette noe kan utføre arbeid.
- Ved akselerasjon av en punktmasse med masse m utføres et arbeid. Arbeidet utført for å akselerere fra $v = 0$ til v er lik $\frac{1}{2}mv^2$. Uttrykket $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ kalles punktmassens *kinetiske energi*.
- Når den ytre krafta på en punktmasse er en funksjon kun av posisjonen, dvs. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, vil også det arbeidet som skal til for å flytte en punktmasse fra origo til posisjonen \vec{r} , kun være en funksjon av posisjonen. Ei slik kraft kalles ei *konservativ kraft* og arbeidet som kreves kalles *potensiell energi*.

- Den konservative krafta assosiert med en gitt potensiell energi, er for enhver posisjon \vec{r} lik minus *gradienten* til potensielle energien i posisjon \vec{r} , dvs. $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$.
- For en punktmasse i et konservativt potensial svarer et minimum i potensiell energi til *stabil statisk likevekt* (“hviler i bunnen”).
- For en punktmasse i et konservativt potensial svarer et maksimum i potensiell energi til *labil statisk likevekt* (“balanserer på toppen”).
- For en punktmasse i et konservativt potensial er summen av kinetisk og potensiell energi posisjonsuavhengig (konstant) og lik punktmassens *totale energi*.
- *Friksjonskrefter* er eksempel på *ikke-konservative krefter*. Mens konservative krefter kun er avhengig av punktmassens posisjon, er friksjonskrefter avhengig også av bevegelsen.
- Ved tørr friksjon er *glidefriksjonen* mindre enn *den statisk friksjonen*, men ellers hastighetsuavhengig.
- Friksjonskrafta for et sfærisk legeme som beveger seg tilstrekkelig langsomt gjennom et fluid (*fluidfriksjon*), er proporsjonal med hastigheten og har retning motsatt retning av hastigheten.

Kapittel 4

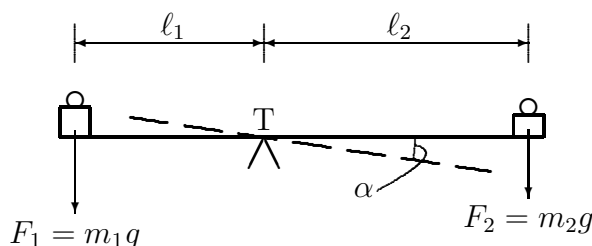
Dreiemoment og vektstangprinsipp

Vi skal i dette kapitlet gjøre rede for vektstangprinsippet og begreper massefellespunkt, dreiemoment og kravene til statisk likevekt.

“Gi meg et fast punkt, og jeg skal løfte jorda”, sa Arkhimedes¹, oldtidens største naturviter og militæringenjør. Hva man kan gjøre med ei vektstang, har vært kjent fra tidenes morgen – men det ser ut til å ha gått ut av pensum i dagens norske videregående skole. Vi skal derfor i det følgende gi ei kort innføring i “Arkhimediske prinsipper”.

4.1 Vektstang i skålvektkonfigurasjon

La oss starte med å se på en vanlig skålvektkonfigurasjon, i idealisert utgave:



To lodd, masser m_1 og m_2 .
Vektløs stang, lengde ℓ .
Opplagringspunkt T.
Lengdene ℓ_1 , ℓ_2 skal velges slik at systemet er i balanse.

Likevekt svarer, som nevnt tidligere, til et minimum i den potensielle energien. Dette har sammenheng med at for et minimum er den deriverte av potensialet lik null, hvilket innebærer at summen av ytre krefter er lik null – som i sin tur, i følge

¹Arkhimedes (ca. 287 – 212 f.Kr.), gresk vitenskapsmann, Siracusa på Sicilia (på den tida under gresk herredømme). Berømt for sin forståelse og bruk av vektarmprinsippet, legemers og plans tyngdepunkt, legemers oppdrift i væsker og sine teknologiske bidrag til forsvaret av sin heimby.

Newtons 2. lov, betyr at det ikke er noen akselerasjon. Dvs. hvis systemet er i ro, vil det forbli i ro – hvilket er definisjonen på at system er i likevekt.

Velger man å angi den potensielle energien i forhold til energien når vektarna befinner seg i horisontal stilling, får man at den potensielle energien til vekta er gitt som

$$V = F_1 \Delta h_1 + F_2 \Delta h_2 = F_1 \ell_1 \sin \alpha - F_2 \ell_2 \sin \alpha = (F_1 \ell_1 - F_2 \ell_2) \sin \alpha \quad (4-1)$$

hvor Δh_i ($i=1,2$) er høyden til masse m_i over horisontalplanet gjennom opplagringpunktet T. For at vinkel $\alpha = 0$ skal svare til likevekt, må man for $\alpha = 0$ ha at

$$\frac{dV}{d\alpha} = (F_1 \ell_1 - F_2 \ell_2) \cos \alpha = 0. \quad (4-2)$$

Når vekta er plassert i et homogent gravitasjonsfelt ($g = \text{konstant}$), gir dette at man har likevekt når

$$m_1 \ell_1 = m_2 \ell_2, \quad (4-3)$$

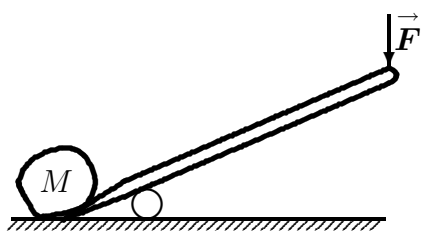
– som enhver gammel fiskehandler vet.

Legg merke til at når likning (4-3) er oppfylt, er den potensielle energien til vekta lik null for alle verdier av vinkel α . Det vil si at vekta er i likevekt for alle verdier av vinkel α , når likning (4-3) er oppfylt. Matematisk sett er dette analogt til situasjonen når man legger ei kule på ei plan horisontal plate.

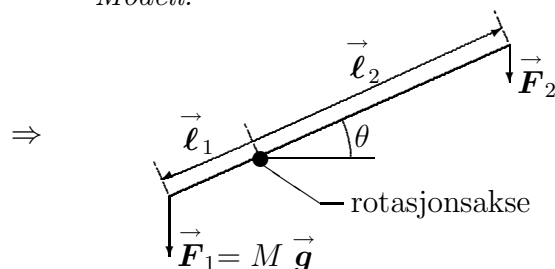
4.2 Løfting med spett

La oss så se på vektstanga brukt som løfteredskap, som illustrert nedenunder – i reell og idealisert modell.

Løfting med spett:



Modell:



Den generelle likevektsbetingelsen blir som for skålvekta at

$$F_1 \ell_1 \cos \theta = F_2 \ell_2 \cos \theta. \quad (4-4)$$

For løfting med spett har man dermed at

$$F_1 \ell_1 = F_2 \ell_2. \quad (4-5)$$

Dvs. at med tilstrekkelig lang arm ℓ_2 kan massen M løftes med vilkårlig liten kraft F_2 (forutsatt at spettet ikke bryr seg og opplagringspunktet tåler belastninga og ligger i ro).

4.3 Dreiemoment

Med henvisning til likning (4-4) viser det seg nyttig å innføre vektoren $\vec{\tau}$

$$\left| \vec{\tau}_1 \right| = F_1 \ell_1 \cos \theta = F_1 \ell_1 \sin(\pi/2 - \theta) = \left| \vec{\ell}_1 \times \vec{F}_1 \right| \quad (4-6)$$

$$\left| \vec{\tau}_2 \right| = F_2 \ell_2 \cos \theta = F_2 \ell_2 \sin(\pi/2 - \theta) = \left| \vec{\ell}_2 \times \vec{F}_2 \right| \quad (4-7)$$

der $\pi/2 - \theta =$ vinkelen mellom $\vec{\ell}$ og \vec{F} . Vektoren kalles *dreiemoment* (engelsk: “torque”) og på full vektoriell form er den definert

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\ell} \times \vec{F}.} \quad (4-8)$$

For det spesialtilfellet at retninga til krafta står vinkelrett på retninga til arma, har man at

$$\boxed{\text{dreiemoment} = \text{kraft} \cdot \text{arm}.} \quad (4-9)$$

4.3.1 Dreiemoment og arbeid

Under diskusjonen av skålvekta fant vi at den potensielle energien knyttet til kraft F_1 var gitt som $V = F_1 \ell_1 \sin \alpha$. For konservative systemer er endringa i potensiell energi dV lik utført arbeid dW slik at ved rotasjon er

$$\boxed{dW = F_1 \ell_1 \cos \alpha \, d\alpha = \left| \vec{\tau}_1 \right| \, d\alpha.} \quad (4-10)$$

Eller sagt med ord: Ved rotasjon har man at

$$\boxed{\text{arbeid} = \text{dreiemoment} \cdot \text{vinkel},} \quad (4-11)$$

mens man for translasjon hadde at arbeid er lik kraft ganger vei. Dette betyr at ved rotasjon spiller dreiemomentet rollen som ei “generalisert kraft” mens rotasjonsvinkelen spiller rollen som “generalisert vei”.

4.4 Tyngdepunkt og massefellespunkt

Når skålvekta er i likevekt, er virkninga av de to massene m_1 og m_2 den samme som om det i steden var plassert en masse $M = m_1 + m_2$ i opplagringspunktet. Opplagringspunktet sammenfaller i dette tilfellet med massenes tyngdepunkt.

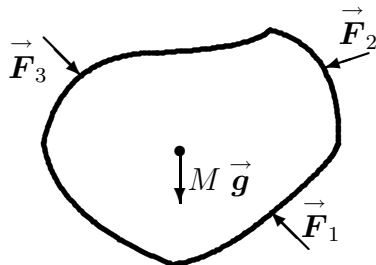
Tyngdepunktet er nesten alltid likt massefellespunktet, så la oss definere det først: For ei samling punktmasser er *massefellespunktet* gitt ved posisjonsvektoren \vec{r}_M

$$\vec{r}_M = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}. \quad (4-12)$$

der M er den totale massen til systemet.

For det vanlige forekommende spesialtilfellet at massens akselerasjon \vec{g} er konstant over systemet, er tyngdepunktet og massefellespunktet sammenfallende. I praksis kan tyngdepunktet for et legeme finnes ved først å henge legemet opp i ett punkt og så trekke loddlinja gjennom opphengingspunktet. Deretter henger man opp legemet i et nytt punkt og trekker den nye loddlinja. Tyngdepunktet er skjæringspunktet mellom de to loddlinjene. Som vi altså også betrakter som massefellespunktet.

4.5 Statisk likevekt



Vi ser på et utstrakt legeme med masse $M = \sum m_k$, påvirket av ytre krefter \vec{F}_i og tyngdekraft $M \vec{g} = \sum m_k \vec{g}$. Hva er betingelsene for at legemet skal være helt i ro?

Den første likevektsbetingelsen er at akselerasjonen er lik null som i følge Newtons 2. lov innebærer at summen av *alle krefter* – inklusive tyngdekrafta – må være lik null

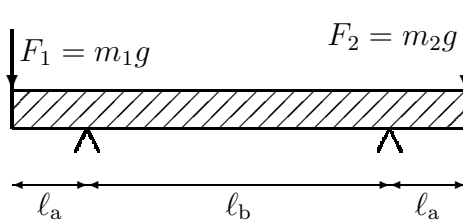
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{Betingelse for translasjonslikevekt.} \quad (4-13)$$

Den neste likevektsbetingelsen er at legemet ikke skal begynne å *rottere* – dvs. at summen av *dreiemomentene* (om en hvilken som helst akse) skal være lik null

$$\sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{Betingelse for rotasjonslikevekt.} \quad (4-14)$$

De to siste likningene er begge avledninger av Newtons 2. lov og de er viktige f.eks. ved analyse av kreftene i en vid klasse bygningskonstruksjoner.

4.5.1 Opplagret bjelke med last



En homogen bjelke med masse M er opplagret som vist i figuren, og belastet med masser m_1 og m_2 i endepunktene.

Hva er lagerkreftene på venstre og høyre lager, F_v og F_h ?

Vi har her to ukjente, F_v og F_h og trenger derfor to uavhengige likninger for å kunne bestemme disse to størrelsene:

Kraftbalanse:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow F_v + F_h = (m_1 + m_2 + M)g. \quad (4-15)$$

Dreiemomentbalanse om høyre lager (“vilkårlig valgt akse”):

$$\sum \vec{\tau}_i = \vec{0} \Rightarrow (l_a + l_b)(m_1 g) - l_b F_v + (l_b/2)(M g) - l_a(m_2 g) = 0. \quad (4-16)$$

Likningene (4-15) og (4-16) gir de to likningene vi trenger for bestemmelse av de to ukjente kreftene. Litt standard algebra gir

$$\begin{aligned} F_v &= \frac{1}{2}Mg + m_1 g(1 + l_a/l_b) - m_2 g l_a/l_b \\ F_h &= \frac{1}{2}Mg + m_2 g(1 + l_b/l_a) - m_1 g l_b/l_a. \end{aligned} \quad (4-17)$$

Hva blir situasjonen hvis det var *tre* i stedet for to opplagringspunkter? Da har vi ikke nok likninger. Det hjelper ikke å sette opp flere momentlikninger fordi det gir bare “null = null” type informasjon. Systemet er da “statisk ubestemt”, og det er nødvendig å ta de elastiske egenskapene til bjelken i betraktning for å finne opplagingskreftene. Matematisk sett analoge situasjoner opptrer i mange bygningskonstruksjoner. Det skal vi *ikke* gå nærmere inn på i dette kurset.

OPPSUMMERING AV KAP. 4

- *Dreiemoment* = kraft · arm, når retninga til krafta er normalt på arma.
- I det generelle tilfellet er dreiemomentet en vektor og definert som $\vec{\tau} = \vec{\ell} \times \vec{F}$, hvor vektoren $\vec{\ell}$ angir både armas lengde og retning, og \vec{F} er krafta.
- Ei vekt er i statisk likevekt når dreiemomentet om opplagringspunktet er lik null. I samsvar med Arkhimedes’ prinsipp gir dette for homogene gravitasjonfelt at $m_1 l_1 = m_2 l_2$, hvor m er masse, l er lengda til arma og indeksen angir henholdsvis vektskål 1 og vektskål 2.

- Ved rotasjon er arbeid = dreiemoment multiplisert med assosiert rotasjonsvinkel.
- I homogent gravitasjonsfelt er massefellespunktet og tyngdepunktet sammenfallende, som da er gitt ved $\vec{r}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$, hvor \vec{r}_i er posisjonsvektoren til punktmasse i med masse m_i og M er total masse.
- Et stivt legeme er i statisk likevekt når A) summen av de ytre kreftene er lik null og B) summen av alle momenter om en vilkårlig valgt akse er lik null.

Kapittel 5

Topartikkelsystemer

Vi skal i dette kapittelet vise hvordan man ved å innføre nye koordinater lettere kan beregne dynamikken til to punktmasser med sentralkrefter. Vi vil i hovedsak bruke denne kunnskapen til å beregne virkninga av elastiske og uelastiske støt mellom to punktmasser.

Topartikkelsystemer er systemer som kan modelleres som bestående av **to** punktmasser. Vi vil her videre anta at disse punktmassene vekselvirker *bare med hverandre*.

Eksempler på hva som kan modelleres på denne måten, med “god approksimasjon”, er

- To molekyler med masse \gg et hydrogenatom, som støter sammen i en gass (brukes i mikroskopisk beskrivelse av varmelæra)
- To biljardkuler som støter sammen
- En bil som treffer en elg
- En planet som sirkler rundt sola

For topartikkelproblemet beskrevet over, har man bevegelse i 3 dimensjoner (x, y, z) for hver av partiklene, dvs. totalt 6 frihetsgrader $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$. Man har derfor i prinsippet *et sett med 6 koplede differensiallikninger*, og ikke bare 3 som vist i likning (2-1) for kun en partikkel. Det kan ved første øyekast synes relativt håpløst å skulle lykkes med å gjøre noe analytisk med denne typen problemer.

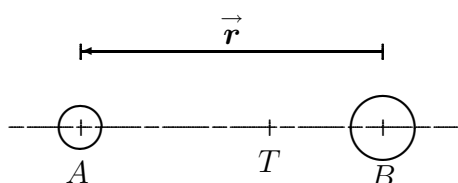
Det viser seg imidlertid at ved å foreta et gunstig valg av nye koordinater – som alle kan uttrykkes ved de gamle koordinatene – man i stedet får *to uavhengige sett med koplede differensiallikninger*, hvor hvert sett består av tre likninger. Dette viser seg å innebære ei betydelig forenkling. Tre av de nye koordinatene beskriver bevegelsen av massefellespunktet til de to punktmassene, mens de resterende tre koordinatene beskriver relativbevegelsen av de to punktmassene.

Dvs. at det opprinnelige 6-dimensjonale problemet er *matematisk sett separabelt* slik at man i steden får to 3-dimensjonale sett med differensiallikninger. Fordi dynamikken beskrevet av de to nye likningssettene er uavhengig, kan dynamikken

for henholdsvis massefellespunktet og relativbevegelsen regnes ut hver for seg. Den totale resulterende dynamikken blir summen av massefellespunkt- og relativbevegelsen. Dette er et nytt eksempel på gyldigheten av *superposisjonsprinsippet* hvor dynamikken beskrevet vha. visse koordinater er matematisk sett separable fra dynamikken beskrevet av de øvrige koordinatene, eller subsett av disse.

5.1 Separasjon av bevegelseslikningene

Vi tar for oss et topartikkelsystem (A, B), og skal i utgangspunktet tillate sentralkrefter mellom partiklene, og ytre krefter.¹ Vi vil i løpet av behandlingen av problemet se hva vi kan tillate av ytre krefter uten at problemet blir uløselig.



Masser, posisjoner og krefter:

$$m_A, \vec{r}_A, \vec{F}_A = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AY}$$

$$m_B, \vec{r}_B, \vec{F}_B = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{BY}$$

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0 \quad (\text{actio reactio est})^2$$

\vec{F}_{AB} er kraft på punktmasse A pga. vekselvirkning med punktmasse B og med retning fra A til B . \vec{F}_{AY} er kraft på punktmasse A pga. ytre krefter.

Vi innfører nå følgende nye koordinater

$$\text{Relativkoordinat} \quad \vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \quad (5-1)$$

Massefellespunktkoordinat (fra likn. (4-12) med $M = m_A + m_B$):

$$\vec{R}_M = \frac{m_A}{M} \vec{r}_A + \frac{m_B}{M} \vec{r}_B. \quad (5-2)$$

Dvs. at man har transformasjonen

$$\{\vec{r}_A, \vec{r}_B\} \iff \{\vec{R}_M, \vec{r}\}, \quad (5-3)$$

hvor

$$\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \quad \vec{r}_A = \vec{R}_M + \frac{m_B}{M} \vec{r} \quad (5-4)$$

$$\vec{R}_M = \frac{m_A}{M} \vec{r}_A + \frac{m_B}{M} \vec{r}_B \quad \vec{r}_B = \vec{R}_M - \frac{m_A}{M} \vec{r}. \quad (5-5)$$

Utgangspunktet for beregning av bevegelsene i systemet er fortsatt Newtons 2. lov, som her blir

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AY} = m_A \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} \quad (5-6)$$

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{BY} = m_B \frac{d^2 \vec{r}_B}{dt^2}. \quad (5-7)$$

¹Kreftene mellom punktpartikler er alltid sentralkrefter når de kan avledes av et kraftpotensial. Eksempler er gravitasjonskraft, og elektrostatisk kraft (Coulombkraft). Magnetiske krefter mellom ladde partikler er derimot *ikke* sentralkrefter.

²Newtons tredje lov: Kraft lik motkraft.

Addisjon av likningene (5-6) og (5-7) og bruk av at $\vec{\mathbf{F}}_{AB} + \vec{\mathbf{F}}_{BA} = 0$, gir følgende likning for *massefellespunktbevegelsen*

$$(5-6) + (5-7) \Rightarrow \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{AY} + \vec{\mathbf{F}}_{BY}}_{\vec{\mathbf{F}}_Y} = \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{(m_A \vec{\mathbf{r}}_A + m_B \vec{\mathbf{r}}_B)}_{M \vec{\mathbf{R}}_M}. \quad (5-8)$$

Som man vel kunne vente, kan massefellespunktbevegelsen beregnes fra total ytre kraft $\vec{\mathbf{F}}_Y$ og total masse M , uavhengig av hva kreftene *mellom partiklene* måtte være:

$$\vec{\mathbf{F}}_Y = \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{P}} \quad \text{Bevegelseslikninga for massefellespunktbevegelsen,} \quad (5-9)$$

hvor $\vec{\mathbf{P}} = M \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{R}}_M = M \vec{\mathbf{V}}_M =$ total bevegelsesmengde. Og – nota bene –

- Hvis summen av ytre krefter er lik null, er den totale bevegelsesmengden $\vec{\mathbf{P}}$ en bevegelseskonstant

Ved å subtrahere likning (5-7)/ m_B fra likning (5-6)/ m_A får vi ei likning for *relativbevegelsen*

$$\frac{(5-6)}{m_A} - \frac{(5-7)}{m_B} \Rightarrow \frac{\vec{\mathbf{F}}_{AB} + \vec{\mathbf{F}}_{AY}}{m_A} - \frac{\vec{\mathbf{F}}_{BA} + \vec{\mathbf{F}}_{BY}}{m_B} = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_B) \quad (5-10)$$

Vi slår sammen $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ og $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$ leddene,

$$\frac{\vec{\mathbf{F}}_{AB}}{m_A} - \frac{\vec{\mathbf{F}}_{BA}}{m_B} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{AB}}{m_A} + \frac{\vec{\mathbf{F}}_{AB}}{m_B} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{AB}}{m_r}, \quad (5-11)$$

hvor $m_r = \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)} = \frac{m_A m_B}{M} =$ *den reduserte massen*.

Multiplikasjon av likn. (5-10) med m_r gir

$$\vec{\mathbf{F}}_{AB} + \frac{m_B}{M} \vec{\mathbf{F}}_{AY} - \frac{m_A}{M} \vec{\mathbf{F}}_{BY} = m_r \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2}. \quad (5-12)$$

Hvis de ytre kreftene *enten* er lik null *eller* er proporsjonale med massene (tyngdekraft $\vec{\mathbf{F}} = m \vec{\mathbf{g}}$), forenkles dette til

$$\vec{\mathbf{F}}_{AB} = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = m_r \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} \quad \text{Bevegelseslikninga for relativbevegelsen.}$$

(5-13)

Den kinetiske energien kan skrives som summen av energien til massefellespunktbevegelsen, og energien til relativbevegelsen:

$$W_k = \frac{1}{2} M V_M^2 + \frac{1}{2} m_r u^2. \quad (5-14)$$

Bevis følger. I uttrykket $W_k = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$ setter vi inn $\vec{v}_{A,B}$ uttrykt ved tyngdepunkthastighet $\vec{V}_M = d\vec{R}_M / dt$ og *relativhastighet* $\vec{u} = d\vec{r} / dt$

$$\vec{v}_A = \vec{V}_M + \frac{m_B}{M} \vec{u} \quad \Rightarrow \quad v_A^2 = V_M^2 + 2 \frac{m_B}{M} \vec{V}_M \cdot \vec{u} + \left(\frac{m_B}{M}\right)^2 u^2 \quad (5-15)$$

$$\vec{v}_B = \vec{V}_M - \frac{m_A}{M} \vec{u} \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = V_M^2 - 2 \frac{m_A}{M} \vec{V}_M \cdot \vec{u} + \left(\frac{m_A}{M}\right)^2 u^2 \quad (5-16)$$

$\vec{V}_M \cdot \vec{u}$ -leddene faller mot hverandre, og vi står etter litt opprydding igjen med likn. (5-14).

5.2 Elastisk stød i én dimensjon

Vi tar for oss stød mellom to klosser som glir friksjonsløst på et plant underlag.



Hastigheter før stød:

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= v_A \hat{e}_x \\ \vec{v}_B &= v_B \hat{e}_x \quad (v_B < 0 \text{ på figuren}) \end{aligned}$$

$$\text{Før stød: } \vec{v}_A, \vec{v}_B \quad \vec{V}_M, \vec{u} := \vec{v}_A - \vec{v}_B \quad (5-17)$$

$$\text{Etter stød: } \vec{v}'_A, \vec{v}'_B \quad \vec{V}'_M, \vec{u}' := \vec{v}'_A - \vec{v}'_B \quad (5-18)$$

Vi skal finne hastighetene etter stød, $\vec{v}'_A = v'_A \hat{e}_x$ og $\vec{v}'_B = v'_B \hat{e}_x$, dvs. to ukjente. For å bestemme disse størrelsene trenger vi to uavhengige likninger.

Den første likninga: Når det ikke er ytre krefter i x -retningen er total bevegelsesmengde (i \hat{e}_x -retningen) konserverv: $P = M V_M = \text{konstant}$. Dette gir

$$V'_M = V_M, \quad \text{dvs.} \quad V'_M = \frac{m_A}{M} v_A + \frac{m_B}{M} v_B. \quad (5-19)$$

Den andre likninga: For elastisk stød er kinetisk energi i massefellespunktssystemet konserverv. Fra likning ((5-14)) følger

$$\frac{1}{2} M V_M^2 + \frac{1}{2} m_r u^2 = \frac{1}{2} M V_M'^2 + \frac{1}{2} m_r u'^2. \quad (5-20)$$

og da $V_M = V'_M$ følger

$$u^2 = u'^2 \quad \text{og, da } \vec{u} \text{ skifter retning:} \quad u' = -u = -(v_A - v_B) \quad (5-21)$$

Vi har dermed

$$\begin{aligned} v_A &\rightarrow v'_A = V'_M + \frac{m_B}{M}u' = \frac{m_A - m_B}{M}v_A + 2\frac{m_B}{M}v_B, \\ v_B &\rightarrow v'_B = V'_M - \frac{m_A}{M}u' = \frac{m_B - m_A}{M}v_B + 2\frac{m_A}{M}v_A. \end{aligned} \quad (5-22)$$

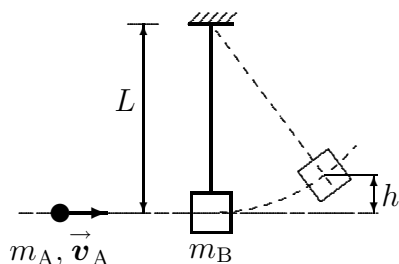
Vi ser spesielt at hvis massene er *like*, fører støtet til at klossene *byter* hastighet (demonstrasjon i auditoriet).

Talleksempel (fra eksamen i fysikk/forkurs 8.1.99):

$m_A = 2,0 \text{ kg}$, $m_B = 3,0 \text{ kg}$; hvis $v_B = 0$ og v'_A måles til $-2,0 \text{ m/s}$, hva var da v_A , og hva ble v'_B ? Og hva var total kinetisk energi før og etter støtet?

[Svar: $v_A = 10 \text{ m/s}$, $v'_B = 8,0 \text{ m/s}$, $W_k = W'_k = 100 \text{ J}$].

5.3 Uelastisk støt i én dimensjon – ballistisk pendel



Ei kule med masse m_A og ukjent hastighet v_A skytes inn i ei tung blokk med masse m_B , hengt opp i ei snor med lengde L – og blir sittende fast i blokka. Blokka svinger opp ei høyde h . Hva var v_A ?

Ved uelastisk støt avtar den totale kinetiske energien idet noe av energien går over til varme. Total bevegelsesmengde, derimot, er bevart. Dvs. farten til massemiddepunktet er uendra gjennom støtet:

Før støt	Etter støt
$V_M = \frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot v_A$	$V'_M = V_M$
$u = v_A$	$u' = 0$
$v_B = 0$	$v'_B = v'_A = V'_M = V_M$

Etter støtet er relativhastigheten null, og den totale kinetiske energien er dermed

$$W'_k = \frac{1}{2}M V_M^2 = \frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot \frac{1}{2}m_A v_A^2. \quad (5-23)$$

Forskjellen mellom W'_k og begynnelsesenergien $\frac{1}{2}m_A v_A^2$ er gått til *varme*.

Den kinetiske energien etter støtet går med til å løfte (blokk + kule) en høyde h mot tyngdekrafta $(m_A + m_B)u$, dvs.

$$V(h) = W'_k \quad (5-24)$$

$$(m_A + m_B)gh = \frac{1}{2} \frac{m_A}{m_A + m_B} m_A v_A^2 \quad (5-25)$$

$$v_A = \left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right) \sqrt{2gh} \approx \frac{m_B}{m_A} \sqrt{2gh} \quad (5-26)$$

OPPSUMMERING AV KAP. 5

- Ved analyse av to-partikkelsystemer er det som oftest gunstig å benytte følgende koordinater i stedet for posisjonsvektorene \vec{r}_A og \vec{r}_B til de to punkt-massene:
 - I) Avstandsvektoren mellom de to punktmassene $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$, og
 - II) Posisjonsvektoren til massefellespunkt $\vec{R}_M = (m_A/M) \vec{r}_A + (m_B/M) \vec{r}_B$. Grunnen er at det viser seg å være matematisk separasjon mellom likningene som beskriver relativbevegelse og massefellespunktbevegelse.
- Bevegelseslikninga for relativbevegelsen er: $m_r d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}_{AB}$, hvor *den reduserte massen* er gitt som $m_r = m_A m_B / (m_A + m_B)$, og \vec{F}_{AB} er krafta på punktmasse A pga. vekselvirkninga med punktmasse B med retning fra B til A.
- Den kinetiske energien til to-partikkelsystemet er $W_k = \frac{1}{2}M V_M^2 + \frac{1}{2}m_r u^2$, hvor totalmassen er lik $M = m_A + m_B$, V_M er hastigheten til massefellespunktet og relativthastigheten er gitt som $\vec{u} = d\vec{r}/dt$.
- Ved elastiske støt er både energien i massefellespunktsystemet og den totale bevegelsesmengden konserverte. Ved elastisk støt mellom punktmasser med lik masse, vil de to punktmassene som resultat av støtet *bytte hastighet*.
- Ved uelastisk støt avtar den totale kinetiske energien idet noe av energien går over til varme. Total bevegelsesmengde er bevart.

Kapittel 6

Rotasjon av stive legemer

Vi skal i dette kapitlet vise hvordan man kan analysere dynamikken til stive legemer med endelig utstrekning. Denne beskrivelsen vil inneholde begreper som rotasjonsenergi, treghetsmoment, dreiemoment og spinn.

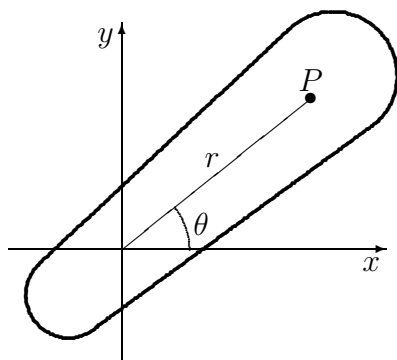
Med begrepet *stivt legeme* forstår vi et legeme som har uforanderlig geometrisk form. I prinsipp finnes ikke slike legemer, men i praksis er det svært ofte en god tilnærming å anta et legeme "stivt". I et stivt legeme er alle relative posisjoner uforanderlige og legemet kan beskrives som ei samling av et stort antall punktmasser. Dette gjør at en dynamisk beskrivelse kan forenkles drastisk.

Legemets bevegelse kan generelt beskrives som bestående av to komponenter; en *rotasjonsbevegelse* om en rotasjonsakse, og en *translasjonsbevegelse* av denne akse. Ofte - men langt fra alltid - vil akse gå gjennom legemets massefellespunkt. Translasjonsbevegelsen kan for disse tilfellene beregnes som om legemet var en punktmasse.

Beskrivelse av rotasjon foregår mest hensiktsmessig i sylinderkoordinater med rotasjonsaksen som symmetriakse.

6.1 Beskrivelse vha. sylinderkoordinater

Vi betrakter et stivt legeme som roterer om en fast akse. Rotasjonsaksen velges som vår z -akse.



Rotasjon om z -aksen.

Hvert punkt P på legemet er karakterisert ved koordinater $\{x, y\} = \{r \cos \theta, r \sin \theta\}$.

Stivt legeme \Rightarrow hvis $\theta \rightarrow \theta + \Delta\theta$ for ett punkt P , er forandringa $\Delta\theta$ den samme for alle P . Følgelig er *vinkelhastigheten* $\Delta\theta/\Delta t$ den samme for alle P .

$$\text{Vinkelhastighet} : \omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{positiv retning mot urviseren}) \quad (6-1)$$

$$\text{Vinkelakselerasjon} : \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta} \quad (6-2)$$

Vinkelhastighet og -akselerasjon angis ofte som vektorer. Da får vi også gitt rotasjonsaksen og rotasjonsretningen: Vektoren har retning langs aksen – dvs. *loddrett på* bevegelsen til punktene P , og positiv retning er definert ved *høyrehåndsregelen*:

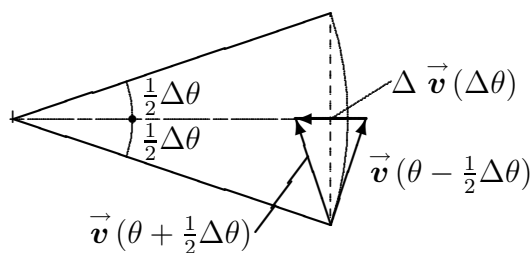
$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z \quad (6-3)$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (6-4)$$

6.1.1 Baneakselerasjon og radialakselerasjon

Bevegelsen til en partikkel i krum bane kan instantant sees som del av en sirkelbevegelse om en akse gjennom *krumningscenteret*. Ren sirkelbevegelse om en fast akse er et spesialtilfelle av dette. Akselerasjonen til partikkelen kan da deles i to komponenter; en *baneakselerasjon* i hastighetens retning, og en *radialakselerasjon* loddrett på hastighet og krumningsakse. Og eventuelt en tredje komponent i krumningsaksens retning – men det glemmer vi foreløpig.

Figuren som følger, viser hvordan vi finner uttrykk for radialakselerasjonen. Anta her at banehastigheten v er konstant.



$$\text{Banehastighet: } |\vec{v}| = v = r\dot{\theta} = r\omega$$

$$\text{Vinkel: } \theta - \frac{1}{2}\Delta\theta \rightarrow \theta + \frac{1}{2}\Delta\theta:$$

$$\begin{aligned} \Delta v_r &= |\Delta \vec{v}(\Delta\theta)| \\ &= |\vec{v}(\theta + \frac{1}{2}\Delta\theta) - \vec{v}(\theta - \frac{1}{2}\Delta\theta)| \\ &= |\vec{v}| \sin(\frac{1}{2}\Delta\theta) \cdot 2 \approx v \frac{1}{2}\Delta\theta \cdot 2 = v\Delta\theta \end{aligned}$$

Radialakselerasjonen blir dermed – med flere alternative uttrykk –

$$a_r = -\frac{\Delta v_r}{\Delta t} \rightarrow -\frac{dv_r}{dt} = -v \frac{d\theta}{dt} = -v\omega = -\frac{v^2}{r} = -\omega^2 r, \quad (6-5)$$

hvor vi setter inn minustegn fordi akselerasjonen er i motsatt retning av økende r . Hvis partikkelen holdes i fast avstand r fra aksen med ei snor eller liknende, er *sentrifugalkraft* assosiert med radialakselerasjonen lik

$$F_r = ma_r = -m \frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r, \quad (6-6)$$

mens “det som strekker snora” av vanlige mennesker kalles “sentrifugalkraft”. I følge fysikk-språklige purister er det siste uttrykket forbudt å bruke – men nå har vi altså skrevet uttrykket.

Hvis banehastigheten v ikke er konstant har vi en *baneakselerasjonen* som er lik

$$a_\theta = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \alpha. \quad (6-7)$$

6.2 Rotasjonsenergi og treghetsmoment

Vi betrakter et stivt legeme som roterer om en fast rotasjonsakse, og skal finne den kinetiske energien – rotasjonsenergien – uttrykt ved vinkelhastigheten.

Legemet kan betraktes som sammensatt av punktmasser P_i , hver med hastighet \vec{v}_i og kinetisk energi $\frac{1}{2}m_i v_i^2$. Den kinetiske energien for legemet som helhet må dermed kunne skrives

$$W_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2,$$

(6-8)

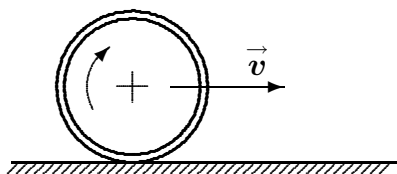
hvor størrelsen I er legemets *treghetsmoment* om den gitte aksen,

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{Treghetsmomentet.} \quad (6-9)$$

Ved beregning av rotasjonsbevegelser er det nesten alltid hensiktsmessig å bruke treghetsmoment og vinkelhastighet i stedet for masse og hastighet. Når treghetsmomentet er beregnet, er summasjonen over massepunktene utført en gang for alle.

Analogier mellom translasjons- og rotasjonsbevegelser er vist i oppsummeringen til slutt i dette kapitlet.

6.2.1 Rullende ring



Betrakt en *tynn* ring, med radius R og masse M , som ruller på et plant underlag.

Alle punkter på ringen har samme avstand R fra en akse gjennom sentrum av ringen (“massesfellespunktaksen”).

Trehetsmomentet om massesfellespunktaksen (*ut av* papirplanet) er følgelig¹

$$I_T = M R^2. \quad (6-10)$$

Vinkelhastigheten om massesfellespunktaksen kalles ω . Periferien av ringen ruller med en lengde lik omkretsen $2\pi R$ i løpet av en periode $T = 2\pi/\omega$, og hastigheten til ringen, v , og vinkelhastigheten ω er følgelig gitt av

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot \omega = \omega R. \quad (6-11)$$

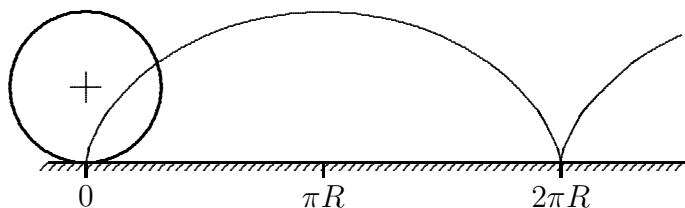
Den totale kinetiske energien til ringen er summen av translasjonsenergien til massesfellespunktet og rotasjonsenergien i massesfellespunktssystemet:

$$W_k = W_{\text{trans}} + W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 R^2 = M v^2$$

(6-12)

Den kinetiske energien er dobbelt så stor som for en ring med samme translasjons-hastighet, men uten rotasjon. Dette er noe å tenke på når sykkelen skal akselereres: Masse i hjulfelgene og dekk teller dobbelt så mye som sykkel (og kropp) ellers.

Vi har her løst opp rullebevegelsen i to komponenter, en rein translasjon og en rein sirkulær bevegelse. Hvis vi setter bevegelsene sammen igjen, og følger et punkt på periferien av sirkelen, ser det hele mer komplisert ut, som vist nedenfor.



“Rullepunktet” løftes opp loddrett fra underlaget. Banen blir en sykloide.

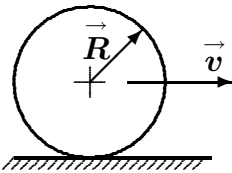
¹Vi fører gjerne på indeks T; I_T , for å markere at trehetsmomentet er beregnet om akse gjennom massesfellespunktet (Tyngdepunktet).

For å knytte dette til noe velkjent: Ventilen på et sykkelhjul (på flatt underlag) vil med god approksimasjon beskrive en sykleidebane.

Ved “ideell rulling” hindres ringen i å skli pga. *statisk* friksjon: Hastigheten til kontaktpunktet *langs* underlaget er derfor lik null. Ved statisk friksjon utføres det ikke noe friksjonsarbeid.

Ved “reell rulling” deformeres underlaget litt av trykket av ringen, som dermed får en liten “motbakke” hele tida. Deformasjonen gir opphav til friksjonsarbeid (og oppvarming).

6.2.2 Rullende massivt hjul



Et massivt, jamntykt og homogent hjul med radius R og masse M ruller med hastighet \vec{v} på et plant underlag. Hva er den kinetiske energien W_k ?

Vi kan beregne W_k som i foregående eksempel, men treghetsmomentet I_T blir et annet, og må finnes først.

Vi betrakter da hjulet som sammensatt av tynne ringer, hver med radius r , tykkelse Δr og samme bredde b ; regner ut treghetsmomentet for hver av de tynne ringene, og så det totale treghetsmomentet ved summasjon – dvs. integrasjon over $\Delta r \rightarrow dr$.

Hver ring har en masse gitt av totalmassen og forholdet mellom volumet av ringen og totalvolumet, og vi har dermed

$$\begin{aligned} \text{Masse av én ring: } \Delta m &= M \frac{\Delta V}{V} = M \frac{2\pi r \Delta r b}{\pi R^2 b} = \frac{2M}{R^2} r \Delta r \\ \text{Treghetsmoment: } \Delta I &= r^2 \Delta m = \frac{2M}{R^2} r^3 \Delta r . \end{aligned}$$

Treghetsmomentet til hjulet om hjulaksen blir

$$I_T = \sum \Delta I \rightarrow \int_{r=0}^R dI = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} M R^2, \quad (6-13)$$

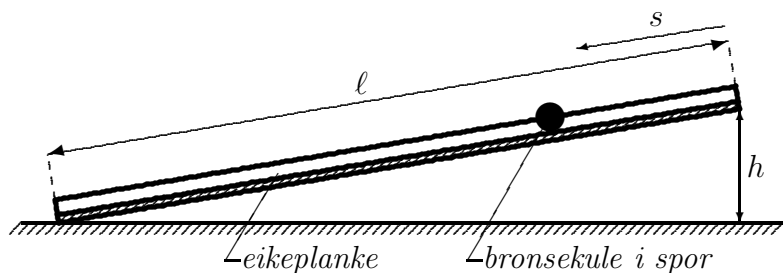
og den totale kinetiske energien er følgende

$$W_k = W_{\text{trans}} + W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{4} M \omega^2 R^2 = \frac{3}{4} M v^2.$$

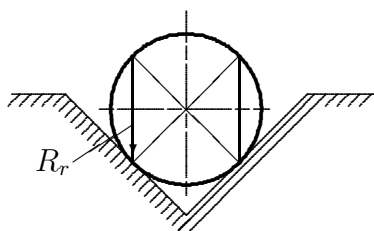
(6-14)

6.2.3 Modellering av Galileis eksperiment

Eksperimentet hvor Galilei (1564-1642) fant/demonstrerte akselerasjonsloven $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, besto av en eikeplanke 12 alen lang, med et polert spor, hvor han rullet bronsekuler. Den ene enden lå på gulvet, og den andre ble løftet én til to alen opp. Og så målte han tida det tok for ei kule å rulle hele, halve og kvarte lengden. Tidsmålingen foregikk med et vannur – pendeluret var ennå ikke oppfunnet – “med en nøyaktighet bedre en 1/10 pulsslag”, hevdet Galilei.



Målingene viste at tida t var proporsjonal med kvadratrota av lengden s . Men – hva *var* egentlig akselerasjonen og tida Galilei målte? La oss finne det ut, for $s = \ell$.



Vi antar rettvinklet spor, som vist.

Rulleradius blir da

$$R_r = R \sin 45^\circ = R/\sqrt{2}$$

og hastigheten blir

$$v = \omega R_r \rightarrow \omega = \frac{v}{R} \sqrt{2}.$$

Energibevarelse; (Potensiell energi) \rightarrow (kinetisk energi); gir

$$V = Mgh \rightarrow W_k = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2, \quad (6-15)$$

dvs.

$$Mgh = \frac{1}{2} M v^2 \left(1 + \frac{2I_T}{MR^2} \right) \quad (6-16)$$

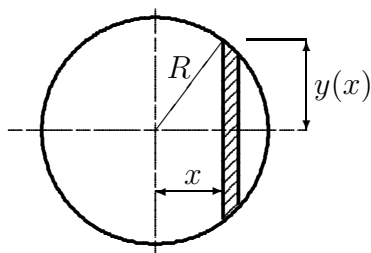
$$v^2 = \frac{2gh}{1 + 2I_T/MR^2} \quad (6-17)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v(\ell) = \sqrt{\frac{gh}{2(1 + 2I_T/MR^2)}} \quad (6-18)$$

$$t = \frac{\ell}{\bar{v}} = \sqrt{2 \left(1 + \frac{2I_T}{MR^2} \right) \frac{\ell^2}{gh}}. \quad (6-19)$$

På grunn av rotasjonen – som spiser energi – går det hele en faktor $\sqrt{1 + 2I_T/MR^2}$ langsommere enn for en punktmasse som sklir “friksjonsfritt”.

For å komme videre, må vi finne treghetsmomentet for ei homogen kule om en akse gjennom massefellespunktet.



Kula kan ses som sammensatt av tynne, homogene skiver, hver med tykkelse Δx og radius $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Treghetsmomentet for ei skive er som regnet ut i forrige eksempel, $\Delta I = \frac{1}{2} \Delta M_{\text{skive}} y^2$

Massen ΔM_{skive} er lik (masse per volumenhet) · (volumet av skiva)

$$\Delta M_{\text{skive}} = \frac{M}{4\pi R^3/3} \cdot \pi y^2 \Delta x = \frac{3M}{4R^3} y^2 \Delta x, \quad (6-20)$$

og treghetsmomentet for kula blir dermed

$$I_T = \sum \Delta I = \sum \frac{1}{2} \Delta M_{\text{skive}} y^2 = \sum \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} y^4 \Delta x, \quad (6-21)$$

som med overgang $\sum \rightarrow \int$ og innsetting $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ gir

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} \int_{x=-R}^R (R^2 - x^2)^2 dx \\ &= \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4) dx \\ &= \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} \left[R^4 x - \frac{2}{3} R^2 x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right]_{-R}^R \end{aligned} \quad (6-22)$$

$$I_T = \frac{2}{5} M R^2. \quad (6-23)$$

Settes dette inn i uttrykket for tida t , får vi endelig

$$t = \sqrt{2 \left(1 + \frac{4}{5}\right) \frac{\ell^2}{gh}} = \sqrt{\frac{9}{5}} t_0, \quad (6-24)$$

hvor $t_0 = \ell \sqrt{\frac{2}{gh}}$ er tida et friksjonsløst massepunkt ville ha brukt. På grunn av rullinga går det en faktor $\sqrt{9/5} \approx 1,34$ langsommere – og akselerasjonen blir tilsvarende mindre.

Tal eksempell:

Setter vi inn Galileis lengde $\ell = 12$ alen og bruker høyden $h = 1$ alen – med $1 \text{ alen} \approx 0,60 \text{ m}$,² og antar $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$, finner vi $t \approx 5,6 \text{ s}$.

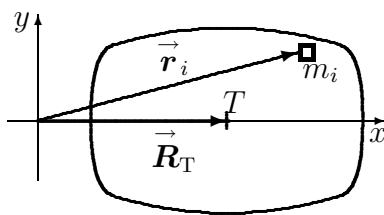
²En norsk alen var 0,62 m, og en italiensk alen noe mindre.

6.3 Parallellakse-teoremet (Steiners sats)

Svært ofte vil den aktuelle rotasjonsaksen *ikke* gå gjennom legemets massefellespunkt. Hvis vi kjenner treghetsmomentet I_T om en akse gjennom massefellespunktet og parallell med rotasjonsaksen, er imidlertid beregningen av treghetsmomentet I om rotasjonsaksen triviell,

$$I = I_T + MR_T^2 \quad \text{Steiners sats,} \quad (6-25)$$

hvor M er legemets masse og R_T rotasjonsaksens avstand fra massefellespunktet. Vi viser dette:



Parallele akser, én gjennom massefellespunktet og én rotasjonsakse parallell med og i avstand R_T fra massefellespunktet.

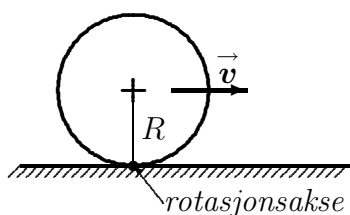
Vi velger rotasjonsaksen som z -akse ($x = y = 0$), og har da

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (6-26)$$

$$\begin{aligned} I_T &= \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_T)^2 = \sum m_i [(x_i - X_T)^2 + (y_i - Y_T)^2] \\ &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2 \underbrace{\sum m_i x_i}_{MX_T} X_T - 2 \underbrace{\sum m_i y_i}_{MY_T} Y_T + \underbrace{\sum m_i}_{M} (X_T^2 + Y_T^2) \\ &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - M(X_T^2 + Y_T^2) = I - MR_T^2 \quad - \text{som skulle vises.} \end{aligned} \quad (6-27)$$

6.3.1 Alternativ beregning av kinetisk energi for rullende hjul

Vi skal igjen finne den kinetiske energien W_k for et massivt, jamntykt og homogent hjul med radius R og masse M , som ruller med hastighet \vec{v} på et plant underlag – men vil nå betrakte bevegelsen som en *rein rotasjon* om kontaktpunktet mellom hjul og underlag. Hjulet roterer altså nå om en akse i avstand R fra hjulets sentrum. Kontaktpunktet flytter seg altså med hjulets hastighet v .



Trehetsmomentet om tyngdepunktaksen er

$$I_T = \frac{1}{2} M R^2$$

og vi fant tidligere energien som

$$W_k = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2 = \frac{3}{4} M v^2.$$

Når vi ser på bevegelsen som rotasjon om kontaktpunktet, blir den kinetiske energien å beregne som rotasjonsenergi alene,

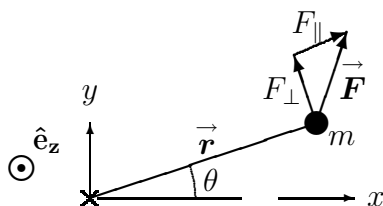
$$W_k = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (6-28)$$

som med Steiners sats blir

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2} (I_T + M R^2) \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 + M R^2 \right) \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} M v^2; \quad - \text{som før.} \end{aligned} \quad (6-29)$$

6.4 Spinn for punktmasse

For beskrivelse av rotasjonsdynamikk er det fordelaktig å formulere Newtons 2. lov i sylinderkoordinater, og bruke dreiemomentet om rotasjonsaksen, $\vec{r} \times \vec{F}$, i stedet for krafta alene. Vi starter igjen med å se på en punktmasse, og finner deretter uttrykk gjeldende for stive legemer ved å summere over punktmassene.



Rotasjonsakse: \hat{e}_z (ut av papiret)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) \quad (\text{Newtons 2. lov})$$

$$\vec{r} \times (\text{Newtons 2. lov}) \Rightarrow$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d}{dt} (m \vec{v}). \quad (6-30)$$

Størrelsen til venstre i likn. (6-30) er

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r F_{\perp} \hat{e}_z \quad \text{Dreiemomentet.} \quad (6-31)$$

Størrelsen til høyre omskriver vi til

$$\vec{r} \times \frac{d(m \vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m \vec{v}) - \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times (m \vec{v})}_{= m \vec{v} \times \vec{v} = 0} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m \vec{v}). \quad (6-32)$$

Siden $m \vec{v}$ er “bevegelsesmengden” kunne den siste parantesen i likningen kalles “rotasjonsmengden”, men størrelsen kalles “spinnet”³, altså:

$$\vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L} \quad \text{Spinnet.} \quad (6-33)$$

Vår nye bevegelseslikning, $\vec{r} \times$ (Newtons 2. lov), kan dermed skrives

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}; \quad \text{med} \quad \begin{cases} \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \\ \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \end{cases} \quad \text{Spinnlikninga.} \quad (6-34)$$

Ved å skue til Newtons 2. lov: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ ser man at likning (6-34) gjerne kan kalles Newtons 2. lov for rotasjon.

6.5 Spinnet for stivt legeme

Vi ser så på et legeme sammensatt av punktmasser P_i med masser og posisjoner (m_i, \vec{r}_i) , og finner spinnlikninga for legemet ved å summere over massepunktene:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \sum \vec{\tau}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i && : \text{totalt dreiemoment} \\ \vec{L} &= \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i && : \text{totalt spinn.} \end{aligned} \quad (6-35)$$

Bare *ytre* krefter bidrar til det totale dreiemomentet – kreftene mellom massepunktene kansellerer i summen som følge av Newtons 3. lov (kraft = motkraft).

$$\begin{array}{l} \text{Hvis det totale dreiemomentet er lik null,} \\ \text{er spinnet } \vec{L} \text{ en bevegelseskonstant.} \end{array} \quad (6-36)$$

Vi spesialiserer så til *stivt* legeme, og kan da uttrykke spinnet ved treghetsmomentet I og vinkelhastigheten $\vec{\omega}$. For alle punktene kan vi skrive

$$|\vec{r}_i \times \vec{v}_i| = r_i v_{i\perp} = r_i^2 \omega \quad \text{– eller, på vektorform} \quad (6-37)$$

$$\vec{r}_i \times \vec{v}_i = r_i^2 \vec{\omega}. \quad (6-38)$$

Det totale spinnet blir dermed

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \vec{\omega} = I \vec{\omega}, \quad (6-39)$$

³Også dette kjære barnet har mange navn: Spinn, dreieimpuls, drivmoment, bevegelsesmengdemoment. Engelsk: angular momentum eller moment of momentum.

og spinnlikninga går over til

$$\boxed{\vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \text{Spinnlikninga for stivt legeme,}} \quad (6-40)$$

hvor $d\vec{\omega}/dt = \vec{\alpha}$ er vinkelakselerasjonen som gitt i likn. (6-4).

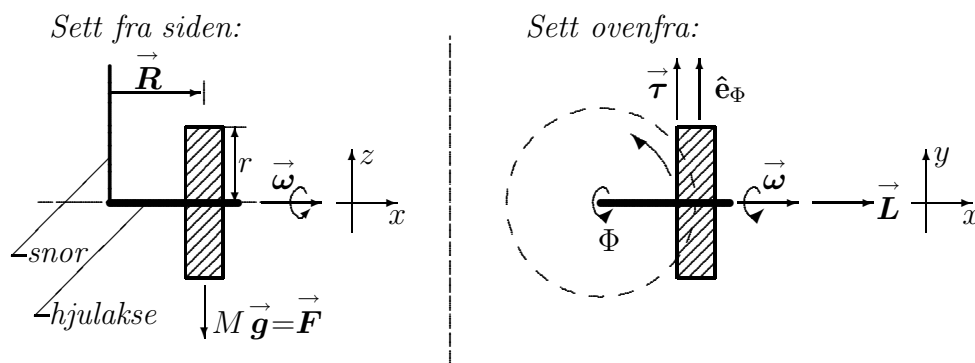
6.5.1 Gyroskop

Et hjul med masse M og radius r roterer med vinkelhastighet ω om en horisontal akse. Hjulakselen er hengt opp i en vertikal snor, i en avstand R fra hjulets midtplan.

Tyngdekrafta vil prøve å dreie hjulaksen til vertikal retning. Som man ser (demonstrasjon i forelesninga) skjer dette ikke; i stedet får hjulaksen en langsom rotasjon om snoraksen – en *presesjon* med vinkelhastighet $\omega_p \ll \omega$.

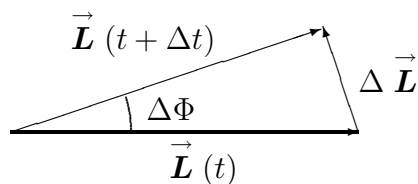
For de fleste vil vel dette se ut til å være helt i strid med hva man forventer – men hvis man holder i et roterende hjul og prøver å vri på det, får man bedre føling med hva slags krefter som er i spill.

Ved at det roterende hjulet preseserer om en vertikal akse med vinkelhastighet $\omega_p = d\phi/dt$ gir et kraftmoment i vertikal retning som er akkurat nok til å motvirke tyngden av hjulet. Dette kommer istand fordi hjulets spinn \vec{L} stadig endrer retning og til dette kreves det ifølge likn. (6-34) et kraftmoment:



$$\begin{aligned} \text{Spinn:} \quad & \vec{L} = I \vec{\omega} \quad (x\text{-retning p\aa figuren}) \\ \text{Dreiemoment:} \quad & \vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F} = \vec{R} \times M \vec{g} = MgR \hat{e}_\Phi \\ \text{Spinnlikn. :} \quad & \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \Rightarrow I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = MgR \hat{e}_\Phi \\ \text{dvs.} \quad & d\vec{\omega} \perp \vec{\omega} \end{aligned} \quad (6-41)$$

- Intet dreiemoment i \vec{L} -retning $\Rightarrow |\vec{L}| = I\omega = \text{konstant}$
- Dreiemoment $\perp \vec{L}$ roterer \vec{L} i xy -planet med vinkelhastighet $\vec{\omega}_p \perp \vec{\omega} \Rightarrow$



$$\Delta \vec{L} = \vec{\tau} \Delta t = MgR\Delta t \hat{e}_\Phi \quad (6-42)$$

$$\Delta \Phi = \frac{\Delta L}{L} = \frac{MgR\Delta t}{I\omega}. \quad (6-43)$$

Presesjonsvinkelhastigheten

$$\omega_p = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{MgR}{I\omega}. \quad (6-44)$$

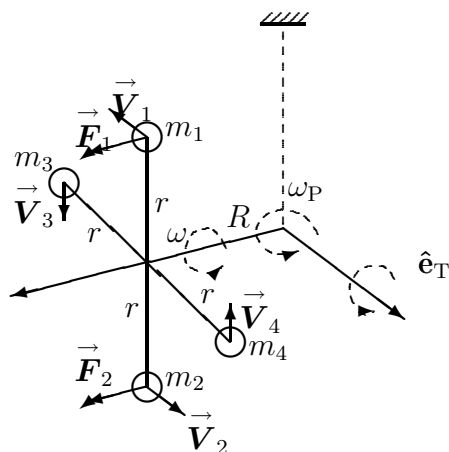
For ring/felg: $I = Mr^2$ og

$$\omega_p = \frac{gR}{\omega r^2}. \quad (6-45)$$

Talkeksempel:

$r = 0,30 \text{ m}$, $R = 0,10 \text{ m}$, $T = 0,25 \text{ s}$ og $g = 9,8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow T_p = 14,5 \text{ s}$.

Beregning av presesjonsvinkelhastigheten for et gyroskop gir en god illustrasjon av styrken og elegansen til bruk av vektoralgebra og begrepene dreiemoment og spinn. Men for de som fortsatt synes at det er merkelig at sykkelhjulet starter å presesere i stedet for å bikke over, finnes det en alternativ måte som gir samme svar, men som er mer intuitiv og kun gjør bruk av enkel Newtons mekanikk.



Felgen er i dette tilfellet erstattet av fire like kuler med samme masse ($m = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$) som befinner seg i avstand r fra rotasjonsaksen. Kulene er koplet stivt til rotasjonsaksen. Total masse er $M = 4m$.

For at rotasjonen om akse \hat{e}_T skal være lik null (hjulet ikke falle ned), må dreiemomentet om denne aksen være lik null, dvs.

$$MgR + rF_1 - rF_2 = 0 \quad \text{hvor} \quad F_1 = m \frac{V_1^2}{R} \quad \text{og} \quad F_2 = m \frac{V_2^2}{R}, \quad (6-46)$$

hvor F_1 og F_2 er sentrifugalkrafta på henholdsvis kule en og kule to, \vec{V}_1 og \vec{V}_2 er hastigheten for henholdsvis kule en og kule to.

Den eneste måten som man kan få oppfylt denne likninga på, er ved å sørge for at $V_2 > V_1$. Her er det av interesse å legge merke til at når presesjonsvinkelhastigheten

ω_p er positiv, gir dette nettopp hva man er ute etter, nemlig en økning av V_2 og samtidig en reduksjon av V_1 . Hastighetene har bidrag fra rotasjonen ω samt rotasjonen ω_p , slik at

$$V_1 = r\omega - R\omega_p \quad \text{og} \quad V_2 = r\omega + R\omega_p \quad (6-47)$$

Innsetting av disse uttrykkene i momentbalanseuttrykket gitt ovenfor og bruk av at $M = 4m$ gir samme uttrykk for presesjonsvinkelhastigheten som vist i likn. (6-45).

Dvs. at dreiemomentet pga. MgR kanselleres fordi $V_2 > V_1$ som gir at $F_2 > F_1$.

6.5.2 Bumerang

En bumerang er et kasteredskap som brukes av urinvånerne i Australia⁴ og som har den fascinerende egenskap at når det kastes horisontalt kommer våpenet tilbake til utgangspunktet. En moderne variant av bumerangen som kan kjøpes i mange leketøysbutikker, er utformet som en standard fire-vingers klassisk flypropell. Den kastes slik at den roterer om en horisontal akse vinkelrett på kasteretningen (Demonstrasjon i auditoriet?). Pga. translasjonshastigheten til bumerangen gir propellbladene mer "løft" på den sida hvor bladhastigheten pga. rotasjonen er parallell med hastigheten i kasteretningen. Dette gir et dreiemoment helt analogt til det gravitasjonen ga i eksempelet ovenfor. Dette gir en rotasjon av propellen om en vertial akse som medvirker dermed til at propellens translasjonshastighet endrer retning og etter hvert vender tilbake til utgangspunktet. Denne vridninga gir i sin tur opphav til ei kraft som får propellen til samtidig å legge seg over slik at løftet fra de roterende propellbladene medvirker til også å holde propellen svevende. Denne siste effekten er også en følge av Newtons 2. lov, men er litt mer komplisert å utdype kvantitativt.

For blant annet å unngå bumerangeffekten når helikopteret flyr forover med stor hastighet, blir skråvinkelen til hvert rotorblad på et helikopter justert etter hvert som rotorbladet roterer. Bladet gis mindre stigevinkel når det beveger seg med fartsretningen enn når det beveger seg i bakover. På denne måten sikres at hvert rotorblad gir samme løft uavhengig av i hvilken retning bladet peker relativt helikopter kroppen.

OPPSUMMERING AV KAP. 6

- Et stivt legeme består av et stor antall punktmasser hvor alle innbyrdes avstander er tidsuavhengige.
- Ved rotasjon av et stivt legeme om en akse har alle punktmasser samme vinkelhastighet.

⁴Også kjent av oldtidens irakere.

- Når et stivt legeme roterer med vinkelhastighet ω om en akse, er *radialakselerasjonen* for et punkt i avstand r fra rotasjonsaksen gitt ved uttrykket $a_r = -\omega^2 r$.
- *Tregghetsmomentet* ved rotasjon av et stivt legeme om en akse er $I = \sum_i m_i r_i^2$, hvor m_i er massen til punktmasse i og r_i er avstanden fra rotasjonsaksen til punktmasse i .
- Tregghetsmomentet til hjul med masse M , radius R og som roterer om symmetriaksen, er $I = \frac{1}{2}MR^2$.
- Tregghetsmomentet til kule med masse M , radius R og som roterer om aksene gjennom massefellespunktet, er $I = \frac{2}{5}MR^2$.
- Ved rotasjon av et stivt legeme med masse M om en akse som ikke går gjennom massefellespunktet er tregghetsmomentet $I = I_T + MR^2$, hvor I_T er tregghetsmomentet om en akse som er parallell med rotasjonsaksen og som går gjennom massefellespunktet, og R er avstanden fra massefellespunktet til rotasjonsaksen (Steiners sats).
- Den kinetiske energien til et stivt legeme som roterer med vinkelhastighet $\dot{\theta}$ er gitt ved uttrykket $W_k = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$.
- *Spinnet* til et stivt legeme som roterer med vinkelhastighet $\vec{\omega}$, er lik $\vec{L} = I \vec{\omega}$
- Newtons 2. lov tilpasset rotasjon lyder: $\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}$, hvor $\vec{\tau}$ er dreiemomentet om rotasjonsaksen.
- Summa summarum: Formelle analogier mellom translasjons- og rotasjonsbevegelser:

Størrelse	Trans	Rot (vektor)	Rot (skalar)
Stedkoord.	\vec{r}		θ
Hastighet	$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$	$\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega}$	$\dot{\theta} = \omega$
Akselerasjon	$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$	$\ddot{\vec{\theta}} = \vec{\alpha}$	$\ddot{\theta} = \alpha$
“Kraft”	\vec{F}	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\tau = rF \sin \theta$
“Masse”	m		$I = \int r^2 dm$
Kin. energi	$W_k = \frac{1}{2}m v^2$		$W_k = \frac{1}{2}I \omega^2$
“Bev.mengde”	$\vec{p} = m \dot{\vec{r}}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I \vec{\omega}$	$L = r p \sin \theta = I \omega$
Newton 2	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = I \ddot{\vec{\theta}}$	$\tau = I \ddot{\theta}$

Kapittel 7

Periodisk bevegelse

Vi skal i dette kapittelet se lokaliserte bevegelser som er periodiske funksjoner av tida.

Mange fysisk sett svært ulike periodiske fenomener modelleres matematisk på samme måte – slik at én og samme matematiske metode kan benyttes for å beskrive en vid klasse av periodiske fenomener.

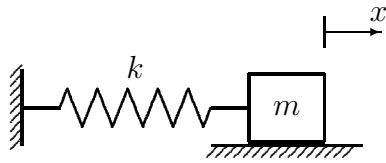
Vi skal her først ta for oss *periodisk bevegelse uten dempning*, og vise at den matematiske beskrivelse for mange systemer kan føres tilbake til – eksakt eller tilnærmet – beskrivelsen av en uniform rotasjon.

Vi ser så på *viskøst dempete systemer* – dvs. systemer hvor friksjonskrafta er proporsjonal med hastigheten. Av de mer velkjente praktiske eksempler på slike systemer, er olje-dempete fjæringssystemer (støtdempere) i biler.

Tilslutt tar vi for oss *påtvungne svingninger* – svingninger drevet og holdt vedlike av en periodisk ytre kraft (“pådrag”). Vi vil vise hvordan utslagsamplituden varierer med frekvensen av pådraget og at det finnes en *resonanstopp* hvor denne frekvensen faller sammen med *egenfrekvensen* for systemet.

Vi tar først for oss to tilfeller av periodisk bevegelse som vi har sett på tidligere i dette kurset: ei fjærdrevet svingning og en jamn rotasjonsbevegelse, og vi viser at de matematisk sett er ekvivalente, med bevegelseslikning av samme form. Deretter viser vi hvordan løsningen av bevegelseslikninga finnes, for gitte startbetingelser.

7.1 Masse og fjær



En masse m er festet i ei fjær med fjærkonstant k , og glir på friksjonsfritt underlag. Utslaget fra likevektsposisjon er x .

Fjærkrafta er retta *mot* utslagsretninga, og er

$$F = -kx \quad \text{Hookes lov.} \quad (7-1)$$

Innsatt i Newtons 2. lov gir dette

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (7-2)$$

som kan ordnes om til formen

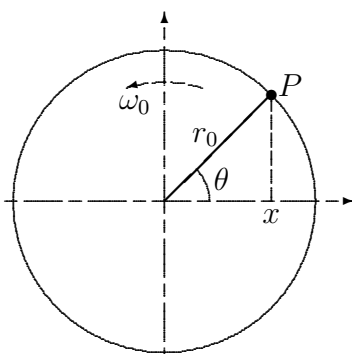
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (7-3)$$

hvor $\omega_0^2 = k/m$. I kap. 2 fant vi at løsningen kunne skrives på formen

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad (7-4)$$

hvor r_0 og θ_0 samt $C_1 = r_0 \cos \theta_0$ og $C_2 = -r_0 \sin \theta_0$ er integrasjonskonstanter.

7.2 Uniform rotasjon



Et punkt P roterer om en akse gjennom origo, med konstant vinkelhastighet ω_0 og konstant baneradius $r = r_0$.

Vinkelen mellom radiusvektor og x -akse er θ , og øker lineært med tida,

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0.$$

Banen uttrykkes enklest i polarkoordinater,

$$\{r, \theta\} = \{r_0, \omega_0 t + \theta_0\}.$$

I kartesiske koordinater tilsvarer dette

$$\{x, y\} = \{r \cos \theta, r \sin \theta\} = \{r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0), r_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)\}.$$

Vi betrakter nå bare x -projeksjonen av banen

$$x(t) = r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0).$$

Uttrykket for $x(t)$ er av samme form som vi fant for fjærbevegelsen.

Vil vi ha tak i x -akselerasjonen – for eksempel for å kunne bestemme vha. Newtons 2. lov hva *føringskrafta* på en masse m i punktet P måtte være. Vi kan derivere uttrykket to ganger:

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 r_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0) \quad (7-5)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) \equiv -\omega_0^2 x. \quad (7-6)$$

x -komponenten av føringskrafta, $F_x = m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x$, er altså proporsjonal med x . Det var det samme som vi fant for krafta fra en fjær (Hookes lov) beskrevet i kap. 2.3 og spesielt i likn. (2-29). Ved sammenlikning ser vi da at føringskrafta i rotasjonsbevegelsen tilsvarer fjærkrafta med fjærkonstant $k = m\omega_0^2$. Vi ser altså

x -projeksjonen av en ren rotasjonsbevegelse med vinkelhastighet ω_0 og en éndimensjonal fjærbevegelse med masse m og fjærkonstant k er matematisk ekvivalente bevegelser, med $\omega_0 \leftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Navnet for et system som er beskrevet av denne likninga er en *udempet harmonisk oscillator*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7-7)$$

Bestemmelse av integrasjonskonstantene

Løsningen av harmonisk oscillator-likninga er av form

$$x = r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0),$$

hvor r_0 og θ_0 er integrasjonskonstanter, som bestemmes av *begynnelsesbetingelsene*.

Bestemmelse av to konstanter krever to betingelser, vanligvis gitt som

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ \dot{x}(t=0) &\equiv v(t=0) = v_0, \end{aligned} \quad (7-8)$$

dvs. at man får to likninger for å løse de to ukjente størrelsene r_0 og θ_0 .

$$(I) \quad r_0 \cos \theta_0 = x_0 \quad (7-9)$$

$$(II) \quad -\omega_0 r_0 \sin \theta_0 = v_0 \quad (7-10)$$

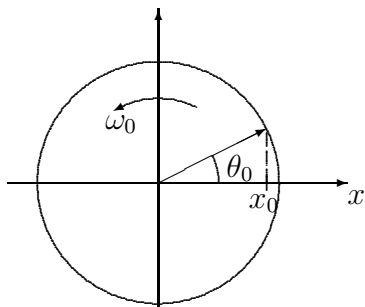
$$(I)^2 + \left[\frac{(II)}{\omega_0} \right]^2 \Rightarrow r_0^2 (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2$$

$$\Rightarrow \text{amplituden: } \underline{r_0 = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / \omega_0^2}} \quad (7-11)$$

$$\frac{(II)}{(I)} \Rightarrow -\frac{\omega_0 \sin \theta_0}{\cos \theta_0} = \frac{v_0}{x_0} \Rightarrow \tan \theta_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

$$\Rightarrow \text{fasevinkelen: } \underline{\theta_0 = \arctan \left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \right)} \quad (7-12)$$

Men – i hvilken kvadrant ligger fasevinkelen θ_0 ? Taster du inn tallverdier til \arctan på kalkulatoren, vil den gi som svar en vinkel i 1. kvadrant ($\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$) hvis argumentet er positivt, og i 4. kvadrant ($\theta_0 \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$) hvis argumentet er negativt. Men hvis v_0 er positiv og x_0 negativ skal θ_0 ligge i 3. kvadrant. Så om kalkulatorvinkelen skal korrigeres med en ekstra π (180°) må du selv finne ut. Men dette er i grunnen ganske enkelt:



$v_0 \equiv \dot{x}(0)$ er hastigheten i x -retning ved tid $t = 0$,
 $x_0 \equiv x(0)$ er x -posisjonen ved tid $t = 0$.

Fra figuren skjønner vi da at:

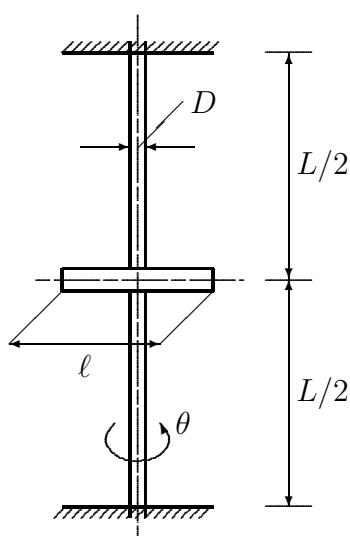
$x_0 > 0$ og $v_0 < 0 \Rightarrow \theta_0$ i 1. kvadrant.

$x_0 < 0$ og $v_0 < 0 \Rightarrow \theta_0$ i 2. kvadrant.

$x_0 < 0$ og $v_0 > 0 \Rightarrow \theta_0$ i 3. kvadrant.

$x_0 > 0$ og $v_0 > 0 \Rightarrow \theta_0$ i 4. kvadrant.

7.3 Torsjonssvingninger



Som eksempel på en harmonisk “fjærbevegelse”, hvor utslaget ikke er en lengde x men en vinkel θ , tar vi for oss ei relativt enkel torsjonssvingning. Det kan være passende i dette kurset – siden vi allerede har vist sammenhengen mellom torsjonsmoment τ og dreiningsvinkel θ for en sylindrisk stav/tråd, som først gitt av Charles Coulomb.

En sylindrisk tråd med lengde L og diameter D er fast innspent i begge ender.

Midt på tråden er festet en sylindrisk stav med lengde ℓ og diameter d : Tråden går gjennom et hull midt på staven, med stav- og trådakse perpendikulære på hverandre.

Hvis staven roteres ut av likevektsposisjon, og så slippes, vil utslagsvinkelen θ variere periodisk. Vi skal modellere denne periodiske bevegelsen, og finne uttrykk for perioden T .

Vi vil anta tråden tynn, slik at trådens treghetsmoment om trådaksen kan neglisjeres i forhold til treghetsmomentet til staven.

Rotasjonsbevegelsen til staven følger dreiemomentlikninga vi hadde i likn. (6-40) (Newtons 2. lov på rotasjonsform):

$$\tau = I \frac{d\omega}{dt} \equiv I\ddot{\theta}. \quad (7-13)$$

hvor I er stavens treghetsmoment om trådaksen, og τ er dreiemomentet (torsjonsmomentet) fra den vridde tråden. For å komme videre, må vi finne uttrykk for τ og for I .

Dreiemomentet

Staven påvirkes av dreiemoment fra *to* trådelementer, hver med lengde $L/2$ og vridningsvinkel θ . Vi fant tidligere (kapitel 7.6) sammenhengen mellom vridningsvinkel og dreiemoment for en stav med lengde ℓ og diameter D ;

$$\theta = \frac{32\ell}{\mu\pi D^4} \tau, \quad (7-14)$$

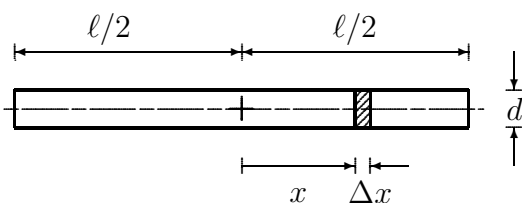
hvor μ er skjærmodulen. En liten sidebemerkning: Nå må vi passe på fortegnet, og snu det – fordi positiv θ gir dreiemoment *mot* θ -retninga.¹ For vårt tilfelle med to trådelementer fås dermed

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = -2 \frac{\mu\pi D^4}{32(L/2)} \theta \equiv -\kappa \theta, \quad (7-15)$$

hvor *torsjonsstivheten* er gitt som

$$\kappa = \frac{\pi \mu D^4}{8 L}. \quad (7-16)$$

Treghetsmoment



Treghetsmomentet om rotasjonsaksen er, per definisjon, $I = \sum r^2 \Delta m$, hvor r er avstand fra rotasjonsaksen.

Hvis staven er tynn, $d \ll \ell$, kan vi med god tilnærming anta at r er lik den lineære lengden x langs stavens akse, dvs. $r \approx x$.

¹Dreiemomentet er her reaksjonen fra tråden, mens det i kapittel ?? var dreiemomentet som vred tråden – derfor fortegnsskiftet.

Massen til hele staven er $M = \ell \cdot \pi r^2 \cdot \rho = \ell \cdot \pi \frac{1}{4} d^2 \cdot \rho$, hvor ρ er stavens massetetthet. Massen til en liten bit Δx er da $\Delta m = M \cdot \Delta x / \ell$. Og dermed

$$\begin{aligned} I &\approx \sum x^2 \cdot M \cdot \frac{\Delta x}{\ell} \longrightarrow \frac{M}{\ell} \int_{x=-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx \\ &= \frac{M}{\ell} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{\ell}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} M \ell^2 \quad \left(= \frac{\pi}{48} \rho d^2 \ell^3 \right) \end{aligned} \quad (7-17)$$

Bevegelseslikning

Fra likn. (7-13) og (7-15) finner vi da bevegelseslikninga for rotasjonsvinkelen θ :

$$\begin{aligned} I \ddot{\theta} &= -\kappa \theta \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta &= 0 \end{aligned} \quad (7-18)$$

$$\text{med } \omega_0^2 = \frac{\kappa}{I} = \frac{3}{2} \pi \frac{\mu D^4}{L M \ell^2} \quad \left(= \frac{6 \mu D^4}{\rho L d^2 \ell^3} \right) \quad (7-19)$$

$$\text{og perioden } T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (7-20)$$

Talkeksempel:

Tråd av stål, med lengde $L = 0,60$ m og diameter $D = 0,50$ mm.

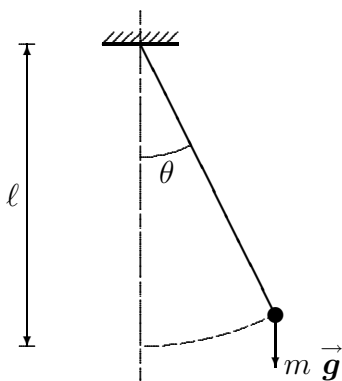
Skjærmodulen for stål: $\mu_{\text{Fe}} = 8,0 \cdot 10^{10}$ Pa.

Stav av messing, med lengde $\ell = 110$ mm og diameter $d = 8,0$ mm.

Massetettheten til messing $\rho_{\text{Me}} = 8,40$ g/cm³.

Dette gir $\omega_0^2 = 69,88$ s⁻² og $T = 2\pi/\omega_0 = 0,75$ s.

7.4 Matematisk pendel



En *matematisk pendel* består av en punktmasse m hengt opp i ei vektløs snor med lengde ℓ .

Hvis massen trekkes ut til sida og slippes, vil tyngdekrafta trekke den tilbake mot likevektsposisjonen, og den kommer i periodiske svingninger.

Massen akselereres langs en sirkelbue av komponenten av tyngdekrafta langs sirkelbuen,

$$F_\theta = -mg \sin \theta. \quad (7-21)$$

Vi setter negativt fortegn på krafta, fordi den virker i retning *mot* utslagsvinkelen θ . Etter Newtons 2. lov er $F_\theta = ma_\theta$, hvor akselerasjonen langs sirkelbanen, a_θ , kan uttrykkes ved vinkelakselerasjonen $\ddot{\theta}$ og pendellengden,

$$a_\theta = \ell \ddot{\theta}. \quad (7-22)$$

Bevegelseslikninga blir dermed

$$-mg \sin \theta = m \ell \ddot{\theta}, \quad (7-23)$$

som vi skriver om til den eksakte bevegelseslikninga for en matematisk pendel

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0. \quad (7-24)$$

Dette er *ikke* likninga for harmonisk oscillator – en harmonisk oscillator-likning skulle hatt $\sin \theta$ erstattet av θ . Men – for små θ er harmonisk oscillator-likninga en god approksimasjon: Utvikler vi $\sin \theta$ i MacLaurin-rekke², får vi

$$\sin \theta = \theta - \theta^3/6 + \dots = \theta(1 - \theta^2/6 + \dots) \quad (7-25)$$

og for vinkler små nok til at $\theta^2/6 \ll 1$, kan vi uten merkbar feil erstatte $\sin \theta$ med θ .

Vi får da

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta \approx 0} \quad (7-26)$$

som er likninga for en harmonisk oscillator med

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Vinkelfrekvens} : \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \\ \text{Periode} : T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \end{array}} \quad (7-27)$$

Merk at massen m er uten betydning for perioden.

En såkalt *sekundpendel* er en pendel hvor en *halv* periode (en “tikk” i “tikk-takk”) er lik ett sekund; det tilsvarer en pendellengde³ $\ell = 0,994$ m.

Hvor store utslag kan så pendelen ha uten at perioden blir merkbart forandret?

For “store” θ blir vinkelakselerasjonen $\ddot{\theta}$ redusert med en faktor omtrent lik $(1 - \theta^2/6)$ – og med litt strev kan man få med også denne faktoren ved integrasjon av bevegelseslikninga. Med resultat

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 - \frac{\theta_{\max}^2}{16} \right), \quad (7-28)$$

²Det vil si Taylorrekke om null, $f(x) = f(0) + x f'(0) + (x^2/2!) f''(0) + (x^3/3!) f'''(0) + \dots$, se ellers Rottmann.

³Som en kuriositet: Før Norge tiltrådte meterkonvensjonen (i 1872), var lengdestandarden her i landet 1 norsk tomme, 1”, lik en Rhinlandsk tomme som er definert 1/38 av lengden av en sekundpendel ved 45° nordlig bredde, som da blir 26,15 mm.

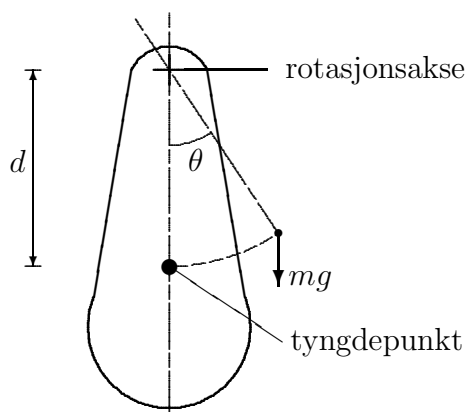
hvor θ_{\max} er utslagsamplituden (i *radianer* – finn for all del ikke på å bruke grader i slike uttrykk – det gir vanvittige resultater).

Tallempele:

For et pendelur vil en $\theta_{\max} = 0,10$ rad ($5,7^\circ$) gi en relativ feil i perioden på $\theta_{\max}^2/16 = 0,064\%$, det vil si en absolutt feil i løpet av ett døgn på $(24 \cdot 60 \cdot 60) \text{ s} \cdot 0,064\% = 55$ sekunder (for fort). Og det er vel litt mye – selv for et gammelt slagur – så utslaget bør være en del mindre enn dette. – Eller korreksjonen må tas inn ved å dimensjonere urpendelen litt lengre.

7.5 Fysisk pendel

Ingen pendler har virkelig all masse samla i ett punkt, som en matematisk pendel. En *fysisk pendel* er et stivt legeme som kan dreie seg – her antatt friksjonsfritt – om en horisontal rotasjonsakse.



La legemets masse være m , avstanden fra rotasjonsaksen til tyngdepunktet d , treghetsmomentet om rotasjonsaksen I , og vinkelutslaget fra likevekt θ . Tyngdekrafta $m \vec{g}$ gir et dreiemoment $\tau = -mgd \sin \theta$ om rotasjonsaksen, og fra dreiemomentlikninga $\tau = I\ddot{\theta}$ fås dermed følgende eksakte bevegelseslikning for en fysisk pendel

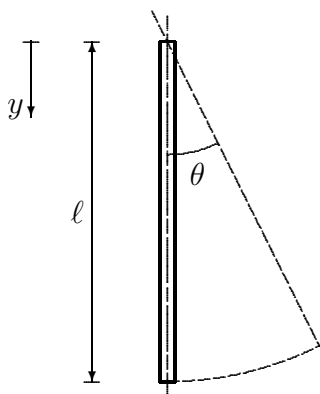
$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I} \sin \theta = 0. \quad (7-29)$$

Den eneste forskjellen fra matematisk pendel-likninga er at $\frac{g}{\ell}$ er erstattet med $\frac{mgd}{I}$. For små vinkler θ kan igjen $\sin \theta$ settes tilnærmet lik θ , og man får ei harmonisk oscillator-likning

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{hvor} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (7-30)$$

For en matematisk pendel er avstanden til tyngdepunktet lik snorlengden, $d = \ell$, og treghetsmomentet om rotasjonsaksen er $I = m\ell^2$. Dette gir $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{m\ell^2}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, som før. Om man bruker Newtons 2. lov eller dreiemomentlikningen, som er ($\vec{r} \times$ Newtons 2. lov), må resultatet naturligvis bli det samme.

7.5.1 Tynn, homogen stav



Som eksempel på en fysisk pendel skal vi ta en tynn, homogen stav med lengde ℓ og masse m er hengt opp friksjonsfritt på en aksling med senter gjennom det ene endepunktet. Avstanden fra rotasjonsaksen til tyngdepunktet er da $d = \ell/2$.

Tregghetsmomentet til staven om rotasjonsaksen kan skrives som summen av tregghetsmomentene for elementer av akselen mellom y og $y + \Delta y$;

$$\begin{aligned} I &= \sum \Delta I = \sum y^2 \Delta m = \sum y^2 \cdot m \frac{\Delta y}{\ell} \\ &\rightarrow \frac{m}{\ell} \int_{y=0}^{\ell} y^2 dy = \frac{1}{3} m \ell^2 \end{aligned} \quad (7-31)$$

Fra likn. (7-30) og med $d = \ell/2$ er da

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{m\ell^2}} \cdot 3 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}, \quad (7-32)$$

og svingetida, ved små utslag, blir dermed

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad (7-33)$$

dvs. $\sqrt{2/3} = 0,817$ ganger svingetida for en matematisk pendel med samme lengde.

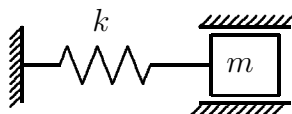
7.6 Dempete svingninger

I vanlig makrofysikk vil harmoniske svingninger alltid være dempet av friksjonskrefter, og svingningsamplituden vil avta med tida.

Det enkleste å modellere matematisk er viskøs friksjon, med friksjonskraft proporsjonal med hastigheten. Dette finner man ved bevegelse av legemer i væske og gass ved ikke for store hastigheter. Et legeme med hastighet \vec{v} vil da bremses med en kraft \vec{F}_f lik

$$\vec{F}_f = -b \vec{v}, \quad (7-34)$$

der b kalles friksjonskoeffisienten. Vi kan som illustrativ modell velge et stempel som beveger seg i en oljesmurt sylinder, og er festet til en spiralfjær.



*Fjærdrevet stempel
med oljedempning*

La stempelutslaget fra likevekt være x , fjærkrafta $-kx$, friksjonskrafta $-bv_x$ med $v_x \equiv \dot{x}$, og stempelmassen m .

Newtons 2. lov gir da

$$F = -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}, \quad (7-35)$$

som vi ordner til standardformen for viskøst dempede svingninger

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (7-36)$$

hvor vi har innført *dempningskonstanten* $\delta = \frac{1}{2}\frac{b}{m}$, og *udempet egenfrekvens* $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ som før.

7.6.1 Løsning ved svak demping

Hvis dempninga forsvinner, det vil si $\delta = b/2m \rightarrow 0$, må løsningen bli en ren harmonisk svingning av form $x = x_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$, som før.

En svak demping vil gjøre at amplituden x_0 avtar langsomt med tida. Dertil vil friksjonen gjøre at det tar *litt* lengre tid fra én null-kryssing til den neste, så vi må erstatte ω_0 i den udempete løsningen med en “dempet egenfrekvens” ω_d litt mindre enn ω_0 .

Den *svakt dempete løsningen* (prøveløsningen) må dermed kunne forventes å kunne skrives på form

$$x(t) = x_0(t) \cos(\omega_d t + \theta_0), \quad (7-37)$$

hvor $x_0(t)$ avtar monotont med økende t .

Formen på amplitudedefunksjonen $x_0(t)$ og størrelsen på ω_d kan vi prøve å bestemme ved å sette vårt “forventede uttrykk” for $x(t)$ inn i svingelikninga.

Vi deriverer $x(t)$ to ganger, setter inn, og ordner det resulterende uttrykket i en sinusdel og en cosinusdel (husk x_0 er funksjon av t : $x_0(t)$):

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cos(\omega_d t + \theta_0) - \omega_d x_0 \sin(\omega_d t + \theta_0) \quad (7-38)$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0 \cos(\omega_d t + \theta_0) - 2\omega_d \dot{x}_0 \sin(\omega_d t + \theta_0) - \omega_d^2 x_0 \cos(\omega_d t + \theta_0) \quad (7-39)$$

Innsetting i (7-36) gir

$$\begin{aligned} & \{-2\omega_d \dot{x}_0 - 2\delta\omega_d x_0\} \sin(\omega_d t + \theta_0) \\ & + \{\ddot{x}_0 - \omega_d^2 x_0 + 2\delta\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0\} \cos(\omega_d t + \theta_0) = 0 \end{aligned} \quad (7-40)$$

Hvis uttrykket over *alltid* skal være lik null, må leddene foran sinus- og cosinusfaktorene være lik null hver for seg. Vi sitter da igjen med

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \dot{x}_0 + \delta x_0 = 0 \\ \text{(II)} \quad & \ddot{x}_0 + 2\delta\dot{x}_0 + (\omega_0^2 - \omega_d^2)x_0 = 0. \end{aligned} \quad (7-41)$$

Likning (I) kan integreres direkte,

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 & \equiv dx_0/dt = -\delta \cdot x_0 \\ \Rightarrow dx_0/x_0 & \equiv d \ln x_0 = -\delta \cdot dt \\ \Rightarrow \ln x_0 & = \ln x_0(0) - \delta \cdot t \\ \Rightarrow x_0(t) & = x_0(0) e^{-\delta \cdot t}. \end{aligned} \quad (7-42)$$

Setter vi dette inn i (II), får vi ei likning til bestemmelse av ω_d :

$$\begin{aligned} \delta^2 x_0 + 2\delta \cdot (-\delta)x_0 + (\omega_0^2 - \omega_d^2)x_0 & = 0 \quad \text{dvs.} \\ \omega_d^2 & = \omega_0^2 - \delta^2. \end{aligned} \quad (7-43)$$

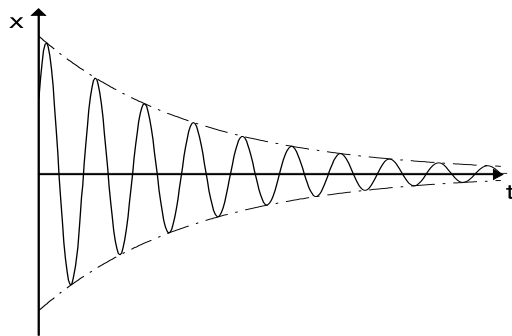
Løsningen kan dermed skrives på form

$$x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \theta_0) \quad \text{hvor} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad (7-44)$$

hvor vi har skrevet A i stedet for $x_0(0)$.

Størrelsene A og θ_0 bestemmes fra begynnelsesbetingelsene $x(0)$ og $\dot{x}(0)$ tilsvarende som for udempet svingning.

Løsningen er en oscillasjon med konstant vinkelfrekvens ω_d , begrenset av “omhyllningskurver” $\pm A e^{-\delta t}$, som illustrert nedenfor.



Dempet
harmonisk
svingning

7.6.2 Klassifisering etter dempningsgrad

Løsningen $x(t)$ funnet i det foregående er åpenbart bare gyldig hvis $\delta < \omega_0$. For $\delta > \omega_0$ blir uttrykket for den dempete egenfrekvensen ω_d imaginært – og dette betyr rett og slett at dempinga da er så sterk at systemet ikke svinger i det hele tatt.

Det er lett å vise at løsningen i så fall kan skrives som en sum av to eksponensialfunksjoner (transienter), som faller mot null med ulike tidskonstanter.

Likninga $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ gir således opphav til to ulike typer løsninger;

$$\delta < \omega_0, \text{ underkritisk dempet: } x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \theta_0)$$

$$\delta > \omega_0, \text{ overkritisk dempet: } x(t) = A^{(+)} e^{-\alpha^{(+)} t} + A^{(-)} e^{-\alpha^{(-)} t}$$

med $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ og $\alpha^{(\pm)} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

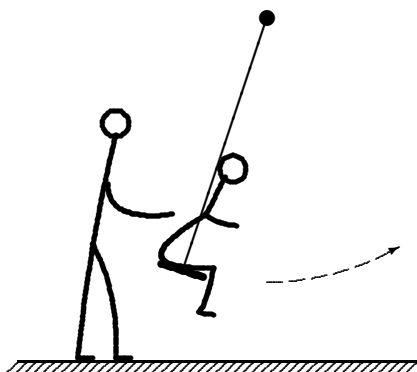
Grensetilfellet $\delta = \omega_0$ betegnes *kritisk demping* – og kan i praksis aldri implementeres eksakt.

7.7 Tvungne svingninger og resonans

Vi har til nå bare betraktet *frie svingninger* – dvs. svingninger som etter å være satt igang, fortsetter uforstyrret til evig tid.

Tvungne svingninger er svingninger – i et dempet system – som settes igang og/eller holdes vedlike av ytre krefter.

Hvor store utslag som fås, avhenger ikke bare av størrelsen, men også tidsforløpet til på den ytre krafta.



Hvis den ytre krafta er periodisk med periode nær den naturlige perioden for systemet, blir utslaget størst (ved gitt størrelse på pådraget) – som vi alle vet fra et tidlig tidspunkt i livet.

Dette kalles *resonans*.

I stedet for korte, periodiske dytt – som i systemet illustrert ovenfor – skal vi her ta for oss systemer påtrykt en harmonisk ytre kraft av form $F_y(t) = F_0 \cos \omega t$. Det er enklere å analysere.

Tar vi utgangspunkt i et vanlig dempet fjærsystem, gir da Newtons 2. lov

$$F = F_0 \cos \omega t - kx - b\dot{x} = m\ddot{x}, \quad (7-45)$$

som med divisjon med m og rydding kan skrives på standardformen for tvungne svingninger med harmonisk pådrag

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \omega t \quad (7-46)$$

hvor δ og ω_0^2 er som før, og $a_0 = F_0/m$.

Når pådraget $a_0 \cos \omega t$ har stått på lenge, må alle transientene i systemet ha blitt dempet ut til null, og $x(t)$ må variere i takt med pådraget. Vi må dermed forvente en "stasjonær respons" av form

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_0 \cos(\omega t + \phi). \quad \text{Stasjonær respons.} \quad (7-47)$$

Hvis pådragsamplituden a_0 holdes konstant og pådragsfrekvensen ω varieres, må vi forvente at respons-amplituden $x_0(\omega)$ varierer, og blir størst ved $\omega \approx \omega_0$. La oss vise at det blir slik.

For å finne funksjonen $x_0(\omega)$, setter vi uttrykket over for $x(t \rightarrow \infty)$ inn i differensiallikninga, og ordner den i én del proporsjonal med $\cos \omega t$ og én del proporsjonal med $\sin \omega t$. Disse to delene må hver for seg oppfylle differensiallikninga, og det gir oss de to likningene som skal til for å bestemme de to ukjente x_0 og ϕ .

Vi skriver først om uttrykket for $x(t \rightarrow \infty)$ til formen

$$x(t \rightarrow \infty) = x_0 \cos(\omega t + \phi) = \underbrace{(x_0 \cos \phi)}_{x_1} \cos \omega t - \underbrace{(x_0 \sin \phi)}_{x_2} \sin \omega t. \quad (7-48)$$

Det er x_0 vi skal finne, men går veien om x_1 og x_2 . Merker oss at

$$x_1^2 + x_2^2 = x_0^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = x_0^2. \quad (7-49)$$

Innsetting i differensiallikninga av

$$\dot{x}(t \rightarrow \infty) = -\omega x_1 \sin \omega t - \omega x_2 \cos \omega t \quad (7-50)$$

$$\ddot{x}(t \rightarrow \infty) = -\omega^2 x_1 \cos \omega t + \omega^2 x_2 \sin \omega t \quad (7-51)$$

gir

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 x_1 - 2\delta \omega x_2 + \omega_0^2 x_1) \cos \omega t \\ + & (-\omega^2 x_2 + 2\delta \omega x_1 + \omega_0^2 x_2) \sin \omega t = a_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (7-52)$$

Til bestemmelse av x_1 og x_2 har vi dermed

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_1 - 2\delta \omega x_2 = a_0 \quad (7-53)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_2 + 2\delta \omega x_1 = 0. \quad (7-54)$$

Vi kvadrerer hver av disse likningene og legger dem sammen. Leddene med $x_1 \cdot x_2$ kansellerer hverandre, og etter opprydding sitter man igjen med

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2] \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{x_0^2} = a_0^2, \quad (7-55)$$

dvs.

$$x_0(\omega) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}. \quad (7-56)$$

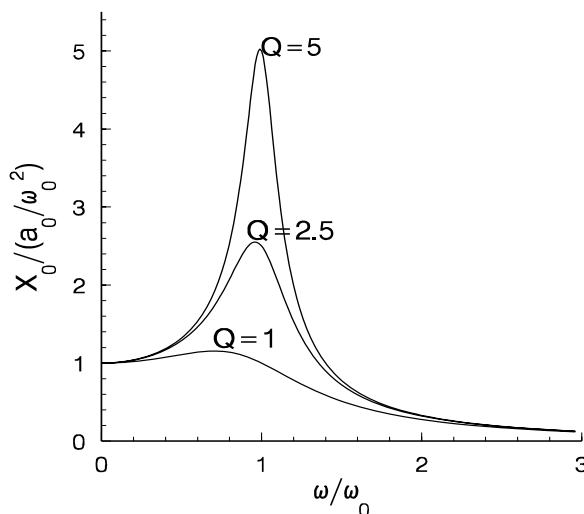
Vi kan også finne fasevinkelen ϕ i løsningen (7-47), fra likn. (7-54):

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{x_2}{x_1} = -\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7-57)$$

Vi merker oss spesielt hvordan $x_0(\omega)$ oppfører seg ved pådragsfrekvens henholdsvis langt under, lik og langt over resonansfrekvensen ω_0 :

$$\begin{aligned} \omega \ll \omega_0 &: x_0 \rightarrow \frac{a_0}{\omega_0^2} \\ \omega = \omega_0 &: x_0 = \frac{a_0}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0}{2\delta} \\ \omega \gg \omega_0 &: x_0 \rightarrow \frac{a_0}{\omega_0^2} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (7-58)$$

Størrelsen $\frac{\omega_0}{2\delta}$ angir hvor høy “resonanstoppen” blir i forhold til statisk respons (respons for $\omega \rightarrow 0$), og kalles gjerne svingesystemets *Q-verdi* (Q for Quality factor).



Frekvensrespons for systemer med Q-verdier:

$$Q = \begin{cases} 1, 0 \\ 2, 5 \\ 5, 0 \end{cases}$$

OPPSUMMERING AV KAP. 7

- x -projeksjonen av en ren rotasjonsbevegelse er lik svingningene til en udempet masse i ei ideell fjær. Bevegelseslikning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ med $\omega_0^2 = k/m$ og løsning $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$.
- Likninga for udempete torsjonsvingninger er helt analog: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ med $\omega_0^2 = \kappa/I$.
- En matematisk pendel er en punktmasse med masse m hengt opp i ei masseløs snor med lengde ℓ . Bevegelseslikninga for en udempet matematisk pendel er eksakt $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$ og tilnærmet $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$.
- En fysisk pendel er et stivt legeme som dreie seg friksjonsfritt om en horisontal akse. Bevegelseslikninga for en fysisk pendel er eksakt $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I} \sin \theta = 0$ og tilnærmet $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I} \theta = 0$.
- For en masse som henger i ei ideell fjær og i tillegg er utsatt for ei friksjonskraft $F_f = -bv$, er bevegelseslikninga $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$, hvor k er fjærkonstanten. Ved svak dempning blir svingningen av form $x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \theta_0)$ med $\delta = b/(2m)$ og $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.
- Tvungne svingninger er svingningene som oppstår når massen utsettes for ei periodisk kraft, f.eks. $a_0 \cos \omega t$. Bevegelseslikninga for et slikt system er $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = a_0 \cos \omega t$.
- Det viser seg at massebevegelsen beskrevet av den siste likninga kan være sterkt avhenging av vinkelfrekvensen ω . Ved lav dempning og konstant amplitude a_0 til pådraget vil man ved en bestemt frekvens kunne få f.eks. 100 ganger så sterkt utsving som ved små verdier av ω . Denne frekvensen kalles systemets resonansfrekvens.

Tillegg A

Fysiske og matematiske grunnprinsipp

A.1 Størrelser og enheter

Alle likninger innen fysikk angir relasjoner mellom symbolske uttrykk, men ofte er man ikke interessert bare i “bokstavuttrykk”. I praksis vil man i tillegg gjerne vite hva f.eks. akselerasjonen er, gitt i tall. Man kan f.eks. ønske å sammenlikne maksimalakselerasjonen til to ulike bilmodeller. Spørsmålet som da straks melder seg, er: Hva er *enheten* (*dimensjonen*) til akselerasjonen? Er det meter per sekund, – eller kanskje sekund per meter? Vi skal nå se litt nærmere på denne problemstillinga.

For enhver fysisk størrelse b har man at

$$\begin{aligned}\text{størrelse} &= \text{måltall} \cdot \text{enhet (dimensjon)} \\ b &= \{b\} \cdot [b].\end{aligned}$$

Tallempele:

Lengde = 5 meter, hvor 5 er måltallet og meter er enheten (dimensjonen).

De viktigste grunnenhetene i *Système International d’Unités* (SI-systemet) er

kg = kilogram Et kilogram er massen til den internasjonale kilogramnormalen,

s = sekund Et sekund er 9 192 631 770 perioder av den strålinga som svarer til overgangen mellom de to hyperfinnivåene i grunntilstanden for cesiumatomet 133,

m = meter En meter er lengden som lys i vakuum går i løpet av $1/(299\,792\,458)$ av et sekund.

VIKTIG: Alle ledd i ei likning må ha samme enhet (dimensjon), dvs. f.eks.

$$a/c + bd = h^2 \Rightarrow [a/c] = [bd] = [h^2]. \quad (\text{A-1})$$

Her betyr “[x]” enheten/dimensjonen til parameter x . Det er en meget viktig arbeidsregel å sjekke regelmessig om alle ledd i ei likning har samme enhet (dimensjon). Dette vil f.eks. straks avsløre om man under utledninga av et uttrykk f.eks. har kommet i skade for å glemme/miste en faktor. *Bruk av tid på å se nærmere på enheten/dimensjonen til en fysisk størrelse, vil også uten unntak øke den fysiske forståelsen av hva en gitt fysisk størrelse egentlig står for.*

Vi skal seinere se at hvis man har et fysisk system beskrevet av et gitt antall parametere a, b, c, d og f – hver med gitt dimensjon – kan man fra analyse av parametrenes dimensjoner bestemme eksponentene α, β, γ og δ

$$f = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \quad (\text{A-2})$$

ved hjelp av kun analyse av parametrenes dimensjoner (*dimensjonsanalyse*). I enkelte tilfeller kan dette – med beskjeden arbeidsinnsats – gi viktig ny innsikt selv for relativt kompliserte systemer.

Til eksamen er det å synde mot likn. (A-1) FY av verste sort, men det er også andre og viktigere grunner til å ta dette med enheter/dimensjoner alvorlig. F.eks. krasjlandet en av amerikanerens marssonder og ble ødelagt fordi en del av teamet som kontrollerte sonden, benyttet MKSA-enheter¹ mens den andre delen benyttet de engelske/amerikanske enhetene yards og pund. *Moral: Det er all grunn til å lære seg dette med enheter (dimensjoner) først som sist. Det er nå engang slik at voksenopplæring av sivilingeniører har lett for å bli kostbart!*

Lengdeskalene vi bruker i dette kurset spenner meget vidt:

$$\begin{aligned} 1 \text{ \AA} &= 0,1 \text{ nm; størrelsen til atomer,} \\ 1 \text{ nm} &= 10^{-9} \text{ m; størrelsen til makromolekyler og nanopartikler,} \\ 1 \text{ }\mu\text{m} &= 10^{-6} \text{ m; størrelsen til bakterier,} \\ 1 \text{ lysår} &= \text{lengden som lyset går i løpet av ett år.} \end{aligned}$$

Det samme gjelder tidsskalaen:

$$\begin{aligned} 1 \text{ ps} &= 10^{-12} \text{ s; svingetida til molekylære svingninger,} \\ 0,1 \text{ ns} &= 10^{-10} \text{ s; tid mellom gassmolekylstøt i vanlig luft,} \\ 1 \text{ ns} &= 10^{-9} \text{ s; lyset går 30 cm i løpet av ett ns,} \\ 1 \text{ s} &= \text{Typiske tider for innstilling av termisk likevekt} \\ &\quad \text{for makroskopiske systemer.} \end{aligned}$$

A.2 Litt grunnleggende matematikk

Skalar = et enkelt måltall som f.eks. 5, 8, etc.

Vektor = en størrelse som både har størrelse (lengde) og retning: $\vec{r} = |\vec{r}| \hat{e}_r$, hvor

¹meter, kilogram, sekund, ampere

$|\vec{r}| = r$ er vektorens størrelse (lengde) og
 \hat{e}_r = enhetsvektoren i retning \vec{r} med lengde $|\hat{e}_r| = 1$.

Husk at enhver fysisk størrelse (skalar eller vektor) har måltall og enhet, mens matematiske størrelser ikke har enhet.

Ligger en vektor i xy -planet, har man at vektoren er gitt som

$$\vec{r} = r_x \hat{e}_x + r_y \hat{e}_y, \quad (\text{A-3})$$

hvor \hat{e}_x og \hat{e}_y er enhetsvektorene langs henholdsvis x - og y -aksen. Koordinataksene forutsettes å stå vinkelrett på hverandre. Parametrene r_x og r_y kalles henholdsvis x - og y -komponenten til \vec{r} .

Vektoren vist i likn. (A-3) kalles *todimensjonal* fordi den har komponenter forskjellig fra null bare langs to koordinatakser. I et vanlig "laboratoriekoordinatsystem" har man tre koordinatakser som alle innbyrdes står vinkelrett på hverandre. I dette tilfellet snakker man om *tredimensjonale vektorer* og har at

$$\vec{r} = r_x \hat{e}_x + r_y \hat{e}_y + r_z \hat{e}_z. \quad (\text{A-4})$$

Vi vil også benytte oss av følgende notasjon for tredimensjonale vektorer

$$\vec{r} = \{r_x, r_y, r_z\}. \quad (\text{A-5})$$

I dette tilfellet er enhetsvektorene ikke angitt eksplisitt. Man kan lett generalisere den matematiske algebraen til vektorer av høyere orden enn tre, men det kan da bli stadig vanskeligere å se for seg det aktuelle matematiske objektet.

Summen av to vektorer er også en vektor

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \hat{e}_x + (A_y + B_y) \hat{e}_y + (A_z + B_z) \hat{e}_z. \quad (\text{A-6})$$

Den *deriverte* av en funksjon $f(x)$ er definert som

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (\text{A-7})$$

Den *partiellderiverte* av en funksjon $f(x, y, z)$ er definert som

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \Bigg|_{\substack{y=\text{konstant} \\ z=\text{konstant}}}. \quad (\text{A-8})$$

En *gradient* er en vektor avledet av en skalar funksjon

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \hat{e}_z \quad (\text{A-9})$$

Gradienten er en vektor som peker i den retninga i rommet hvor den skalare størrelsen $f(x, y, z)$ forandrer seg mest. Gradientens størrelse angir hvor stor denne maksimale endringa er per lengdeenhet for punktet \vec{r} .

Skalarproduktet mellom de to vektorene $\vec{\mathbf{A}}$ og $\vec{\mathbf{B}}$ er en skalar

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = |\vec{\mathbf{A}}| |\vec{\mathbf{B}}| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (\text{A-10})$$

hvor θ er vinkelen mellom de to vektorene $\vec{\mathbf{A}}$ og $\vec{\mathbf{B}}$.

Vektorproduktet mellom de to vektorene $\vec{\mathbf{A}}$ og $\vec{\mathbf{B}}$ er en vektor

$$|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = |\vec{\mathbf{A}}| |\vec{\mathbf{B}}| \sin \theta. \quad (\text{A-11})$$

Vektorproduktet $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ har retning normalt på både $\vec{\mathbf{A}}$ og $\vec{\mathbf{B}}$.

En parabel i xy -planet er kurven gitt av uttrykket

$$y = a(x - x_0)^2 + b. \quad (\text{A-12})$$

En ellipse i xy -planet er kurven gitt av uttrykket

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{A-13})$$

A.3 Separasjon av sammensatte problem

Hvis den matematiske beskrivelsen av et komplisert fysisk problem kan deles inn i separate enheter som kan løses hver for seg – uten å behøve å ta hensyn til hva som skjer med de andre enhetene – er dette nesten alltid til stor hjelp.

Viktige eksempel på dette er alle de fysiske systemer som er beskrevet av lineære differensiallikninger

$$a \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + b \frac{dy(x)}{dx} + c y(x) = f(x), \quad (\text{A-14})$$

hvor koeffisientene a, b og c er konstanter. Funksjonen $f(x)$ er en kjent funksjon (f.eks. $f(x) = \sin x$) og refereres ofte til som “pådraget”.

En viktig egenskap til systemer beskrevet av lineære differensiallikninger med konstante koeffisienter, er at hvis $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,

$$a \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} + b \frac{dy_1(x)}{dx} + c y_1(x) = f_1(x) \quad (\text{A-15})$$

og

$$a \frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} + b \frac{dy_2(x)}{dx} + c y_2(x) = f_2(x), \quad (\text{A-16})$$

så er $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ en løsning av likn. (A-14). Dette resultatet ses lett ved å sette inn uttrykket $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ i venstre side av likn. (A-14) og så gjøre bruk av likningene (A-15) og (A-16).

Dette at man for slike systemer kan finne responsen $y(x)$ når man har et pådrag (“forstyrrelse”) som er en sum av flere bidrag ($f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$), ved å summere resultatet av pådragene hver for seg ($y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \dots$), er et meget viktig resultat. Dette refereres gjerne til som

$$\boxed{\text{superposisjonsprinsippet.}} \quad (\text{A-17})$$

Et annet viktig eksempel på oppdeling av den matematiske beskrivelsen i enheter som er uavhengige, har man ved beskrivelse av akselerasjonen til punktmasser som funksjon av tida, t

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \{\ddot{x}(x, y, z), \ddot{y}(x, y, z), \ddot{z}(x, y, z)\}. \quad (\text{A-18})$$

I mange – men på langt nær alle tilfeller – vil man ved gunstig valg av origo og retning av aksene til koordinatesystemet kunne oppnå at

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \{\ddot{x}(x), \ddot{y}(y), \ddot{z}(z)\}, \quad (\text{A-19})$$

eller med andre ord: $\ddot{x} = f_1(x)$, $\ddot{y} = f_2(y)$ og $\ddot{z} = f_3(z)$, hvor $f_1(x)$, $f_2(y)$ og $f_3(z)$ alle er gitte funksjoner. I dette tilfellet har man fått en beskrivelse hvor man kan regne ut – hver for seg – hva som foregår langs hver av de tre koordinataksene uten å måtte ta hensyn hva som skjer når det gjelder de to øvrige coordinateaksene. Også slike tilfeller refereres gjerne til som eksempler hvor superposisjonsprinsippet er gyldig. Kunnskap om hvordan man velger koordinatsystemet slik at man får forenklingene beskrevet ovenfor, kan stort sett kun erverves ved å erfare, dvs. løsning av flest mulig eksempler/regneøvinger.

Ved analyse av fysiske systemer/regneøvinger er det viktig at man først kartlegger hvor mange “frihetsgrader” systemet har. Med ordet frihetsgrader forstås i fysikk det minste antall uavhengige parametere som trenges for å beskrive systemet. For en partikkel som bare kan bevege seg langs x -aksen, er antallet frihetsgrader lik en. For en punktmasse som kan bevege seg i rommet uten føringer, er antallet frihetsgrader lik tre (x, y, z). For mer kompliserte systemer er det ikke alltid like lett å se hva antallet frihetsgrader er, men det er viktig å bestemme dette tallet fordi man for å kunne bestemme f.eks. dynamikken til systemet alltid trenger like mange likninger som man har uavhengige ukjente, dvs. antallet frihetsgrader. Hvis man ikke fra starten har bestemt antallet frihetsgrader, viser erfaring at det også finnes tilfeller hvor man lett tar i bruk flere parametere enn nødvendig og dermed gjør ting unødig vanskelig for seg selv.

Legg ellers merke til at de grunnlikningene som man benytter i eksemplene og regneøvingene i dette kurset, stor sett begrenser seg til Newtons 2. lov og konserveringslikningene (bevarelseslikningene) for henholdsvis masse, energi, translasjonsimpuls og rotasjonsimpuls (spinn). Når man er på jakt etter å finne like mange likninger som det man har av frihetsgrader, er det blant disse likningene man først og fremst skal lete. I visse tilfelle vil det også være aktuelt å benytte likninger som beskriver geometrien til det problemet som skal analyseres.

Deterministiske prosesser er prosesser hvor resultatet (utfallet) av prosessen kan forutsis med vilkårlig stor nøyaktighet hvis man kjenner verdien til alle relevante parametere når prosessen (eksperimentet) starter. Ballkast er et slikt eksempel: Kjenner man posisjonsvektoren og hastighetsvektoren i det ballen forlater handa (startbetingelsene), kan ballens bane forutsis.

Stokastiske prosesser er prosesser hvor man bare kjenner *sannsynlighetsfordelinga* til utfallet av prosessen selv om man kjenner startbetingelsene med stor nøyaktighet. Kast med terning er et slikt eksempel: I prinsippet er kast med terning en deterministisk prosess, men pga. geometrien til objektet som kastes, er det i praksis likevel ikke mulig å forutsi annet enn sannsynlighetsfordelinga for at terningen faller til ro med f.eks. en “sekser” opp. I eksempelet med terningkast blir prosessen stokastisk fordi det skal så lite til for å endre utfallet av prosessen at vi – fra kast til kast – ikke klarer å repetere startbetingelsene med tilstrekkelig nøyaktighet. Støtprosesser – spesielt på molekylær lengdeskala – er et begrepsmessig viktig eksempel på stokastiske prosesser. Et annet viktig eksempel er rask strømming i væsker, så som virveldannelse (turbulens) i elveløp og bak flyvinger og luftstrømmene knyttet til lav- og høytrykk. I de siste eksemplene skyldes prosessenes stokastiske natur dypereliggende matematiske egenskaper² til de likningene som beskriver disse fysiske prosessene.

OPPSUMMERING AV TILLEGG A

- Fullt fokus på fysiske parametrers enheter/dimensjoner er viktig både for den fysiske forståelsen og ved beregning av fysiske parametrers numeriske størrelse.
- For å kunne analysere dynamikken til et gitt system, kreves at antallet uavhengige likninger som benyttes, er lik antall frihetsgrader for systemet. De likningene som i dette kurset kommer til anvendelse i denne sammenheng, er stort sett Newtons 2. lov og konserveringslikningene (bevarelselikningene) for henholdsvis masse, energi, translasjonsimpuls og spinn.
- Matematikk er både fysikkens språk og et av fysikkens viktigste verktøy. Det er derfor viktig av brukerne av dette kompendiet har et visst minste omfang av matematikkferdigheter.

²Hovedpoenget i denne sammenheng er at likningene som beskriver dynamikken til fluider (Navier-Stokes likninger), er ikke-lineære.