

# Kap. 9+10

## Rotasjon av stive legemer

### Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi  $E_k$
- Tregghetsmoment  $I$
- Kraftmoment  $\boldsymbol{\tau}$
- Spinn (dreieimpuls):  $\boldsymbol{L}$
- Spinnsatsen (Newton 2 for rotasjon):  
$$\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$$
- Stive legemer:  $\boldsymbol{L} = I \boldsymbol{\omega}$       $\boldsymbol{\tau} = I d\boldsymbol{\omega}/dt$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m...

# Rotasjonsshjul som energilager

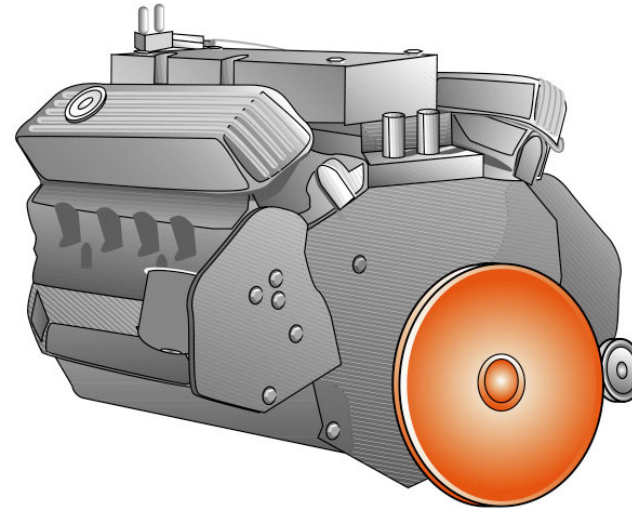
- Stålskive 10 cm tykk, 1,0 m di

**Problem:**

Tung! (600 kg) Deformere  
I periferien er:

Banefart  $v = \omega r = 1000$  m/s

Sentripetalaksel  $\omega^2 r = 220$



Flywheel  
diameter = 0.36 m

Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley.

- Energi ved 20000 RPM(omdr. per min):

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = 1,7 \cdot 10^8 \text{ J}$$

- Forbrenningsenergi i bensintank på 40 liter,  
ved utnyttelse 25%: ca  $4 \cdot 10^8$  J

# Kap. 9. Rotasjon av stive legemer

## Vi har sett på:

- Vinkelhastighet  $\omega = d\theta/dt$ , vinkelakselerasjon  $\alpha = d\omega/dt$
- Sentripetalakselerasjon  $a_c = -r \omega^2 = -v^2/r$
- Baneakselerasjon  $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
- Treghetsmoment  $I = \sum r_i^2 m_i = \int r^2 dm$  (om en gitt akse)
  - Ring om sentrum:  $I = M R^2$
  - Skive om sentrum:  $I = \frac{1}{2} M R^2$
  - Lang, tynn stav om midtpunkt:  $I = (1/12) M L^2$(Alle disse gjennom massefellespunktet = cm )

- Steiners sats (parallellakse-teoremet):

Treghetsmoment om annen parallell akse i avstand  $d$ :

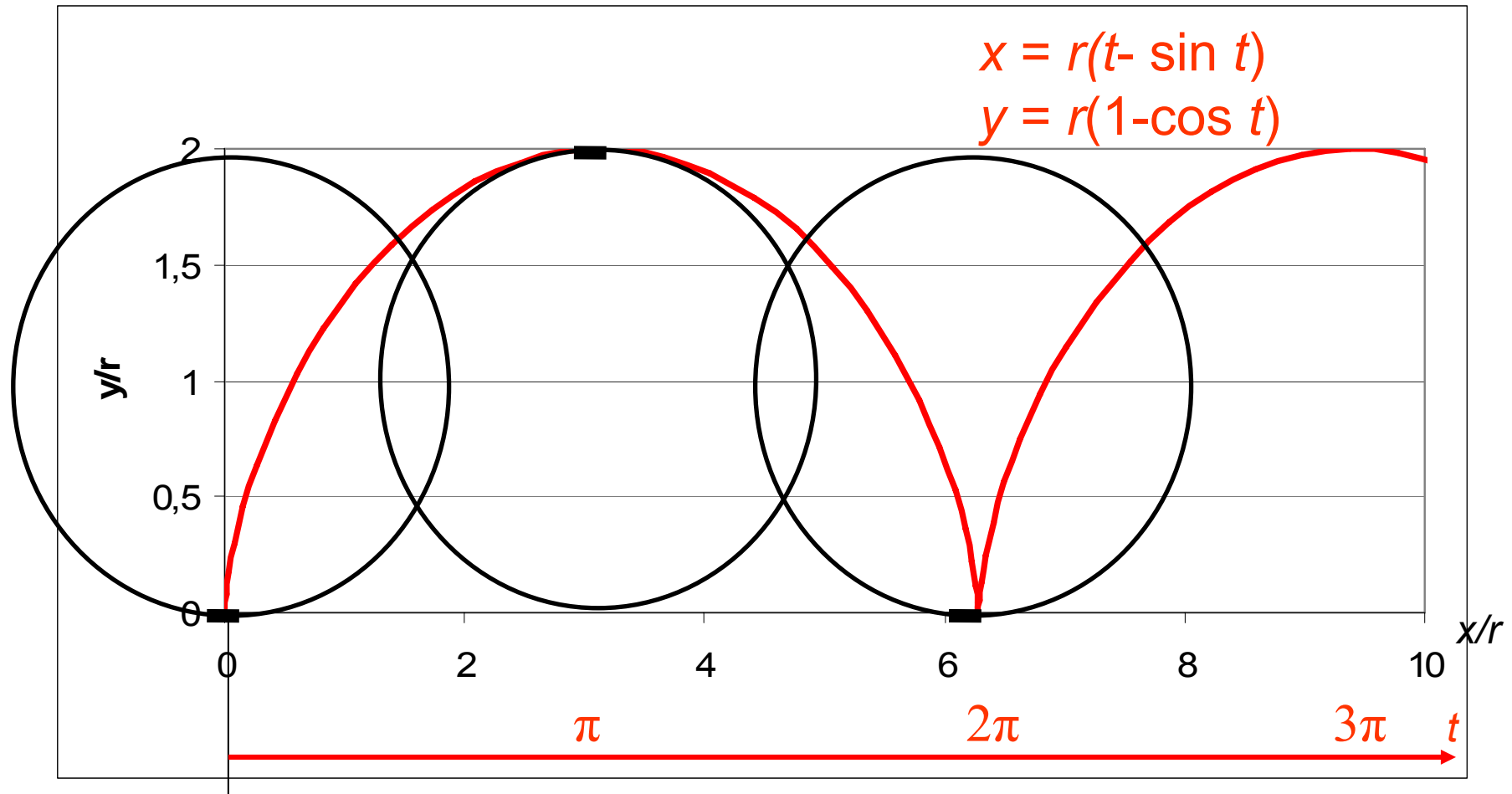
$$I = I_{\text{cm}} + M d^2$$

dvs.  $I_{\text{cm}}$  er alltid det **minste** mulige treg.moment

[http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel\\_axes\\_rule](http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_axes_rule)

# Sykloide

(et punkt på felgen ved rulling)



## *(Kort oppsummering)*

### Snelle med snor

- Trekkes mot deg ved liten vinkel  $\alpha$
- Trekkes fra deg ved stor vinkel  $\alpha$
- Vi fant: Grense ved  $\cos \alpha = r/R$

- Krav til statisk likevekt:

- Ingen translasjon  $\Rightarrow \Sigma \mathbf{F} = 0$

- Ingen rotasjon  $\Rightarrow \Sigma \boldsymbol{\tau} = 0$  (  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  )

- » om **enhver** valgt akse

*(Statisk) friksjon er vesentlig for rulling,  
men friksjons**arbeidet** er oftest neglisjerbart.*

*(Men ved glipp/rutsjing er friksjonsarbeidet vesentlig).*

Fra Angell & Lian:  
Fysiske størrelser  
og enheter,  
s. 42.

$p$	<b>driv, bevegelsesmengde</b> kg m/s	[momentum] $p = mv$ . (I visse deler av teoretisk fysikk blir betegnelsen generalisert impuls brukt både om driv og om impuls.)
$I$	<b>impuls, kraftstøt</b> Ns = kg m/s	[impulse] $I = \int Fdt = \Delta p$ . $F$ er kraft og $p$ er driv.
$L$	<b>spinn, drivmoment, (bevegelsesmengdemoment)</b> kg m <sup>2</sup> /s	[moment of momentum, angular momentum], $L = r \times p = r \times mv$ . (I avansert fysikk blir betegnelsen generalisert impulsmoment brukt både om spinn og om impulsmoment.)
$H$	<b>impulsmoment</b> Nms = kg m <sup>2</sup> /s	[angular impulse] $H = \int Mdt = \Delta L$ . $M$ er kraftmoment og $L$ er spinn.
$M$	<b>kraftmoment</b>	[moment of force] $M = r \times F$
$M, T$	<b>dreiemoment</b> Nm	[torque] For spesielle kraftmoment blir det ofte bruk egne navn, som bøyemoment [bending moment] $M$ , vrimoment og torsjonsmoment $T$ [twisting, torsional moment] og kraftparmoment $M$ [moment of a couple].
$k$	<b>stivhet, fjærstivhet</b> N/m	$F = -kx$

Punktpartikkel:

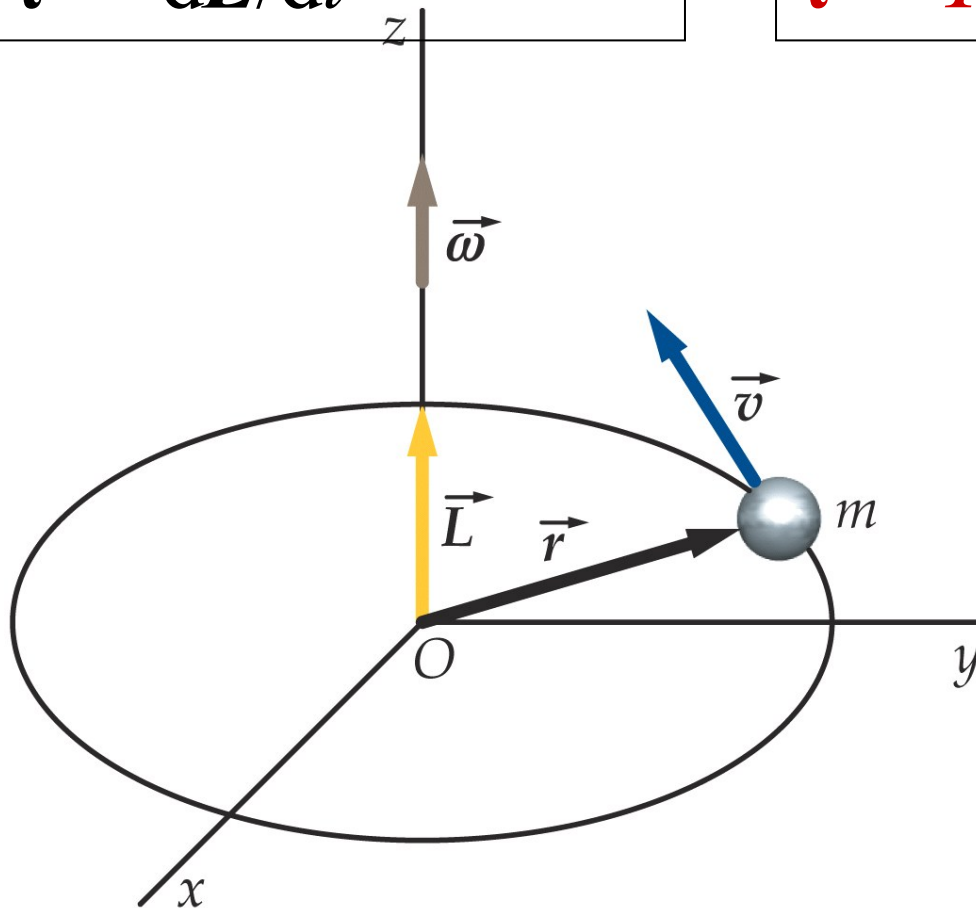
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$$

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

Stivt legeme:

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{\tau} = I d\boldsymbol{\omega}/dt$$



## Kap. 9+10. Rotasjon av stive legemer

- Tregghetsmoment  $I = \sum r_i^2 m_i$  (om en gitt akse)
- Rotasjonsenergi  $E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$
- Kraftmoment:  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  stive legemer:
- Spinn (dreieimpuls)  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$
- Spinnsatsen (N2-rot):  $\boldsymbol{\tau} = d/dt \mathbf{L} = \mathbf{I} d/dt \boldsymbol{\omega}$
- Ingen ytre moment:  $\mathbf{L} = \text{konst.}$



## Translasjon:

Bevegelsesmengde  
(linear momentum):

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}$$

N2-trans:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$$

”Stivt” legeme (konst.  $m$ ):

$$\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt = m \mathbf{a}$$

$$\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \text{konstant (N1)}$$

”stivt” legeme:  $\mathbf{v} = \text{konst}$

## Rotasjon:

Spinn

(angular momentum):

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega} \text{ Stivt legeme}$$

N2-rot (spinnsatsen):

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

Stivt legeme (konst.  $I$ ):

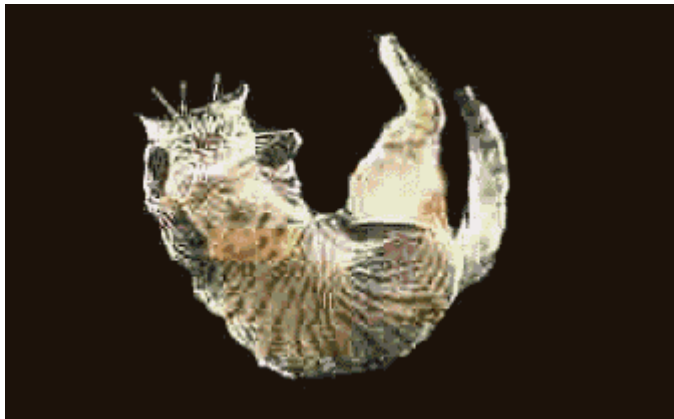
$$\boldsymbol{\tau} = I d\boldsymbol{\omega}/dt = I \boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{konstant (N1-rot)}$$

stivt legeme:  $\boldsymbol{\omega} = \text{konst}$

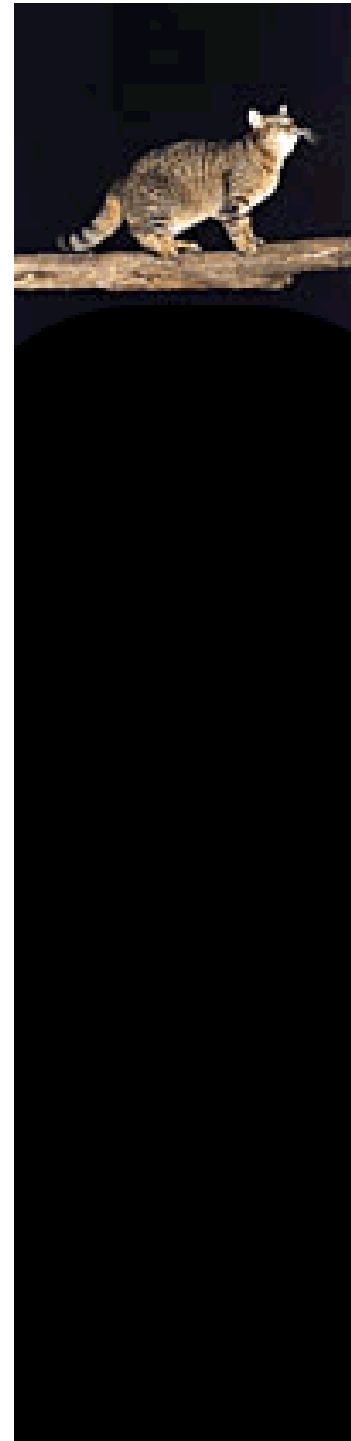
# Katter lander

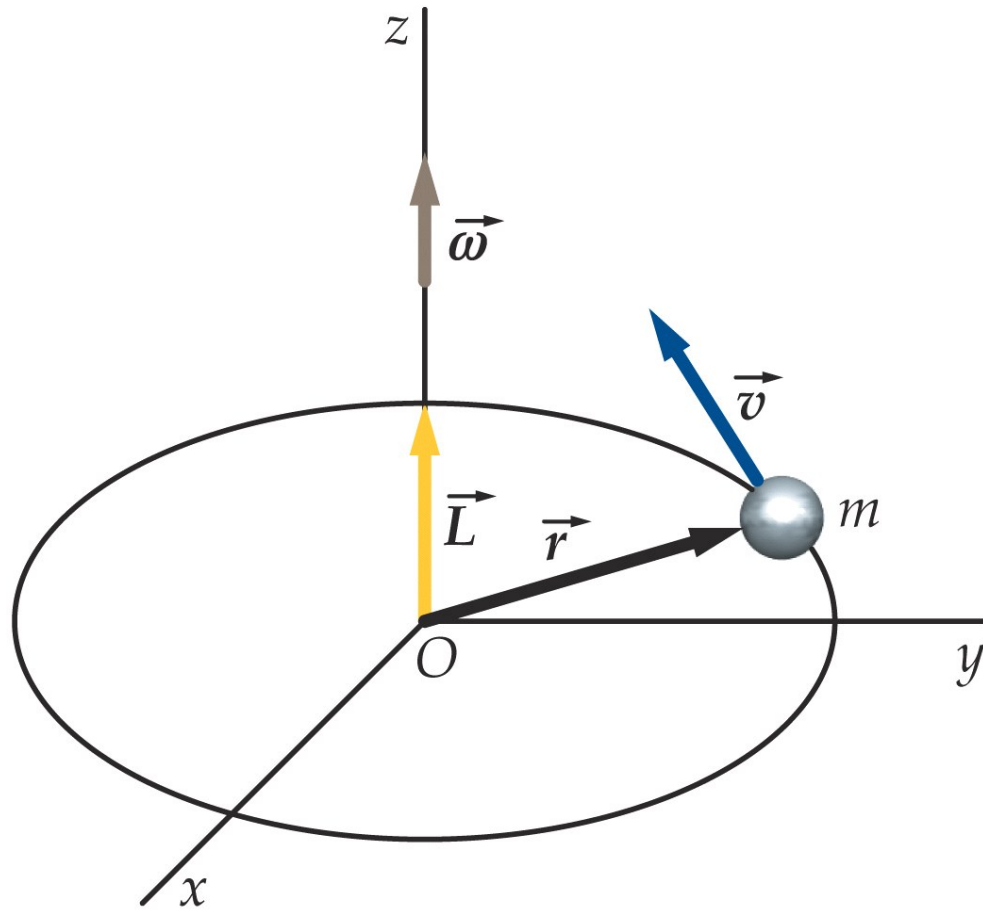
- alle på alle på føttene!



Bilder fra:

[http://www.cds.caltech.edu/~mleok/falling\\_cats.htm](http://www.cds.caltech.edu/~mleok/falling_cats.htm)





Vektorstørrelser:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= d/dt(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \\ &= \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_c \end{aligned}$$

# Oppsummering:

## Rulling (dvs. uten glipping)

- *Statisk friksjon er vesentlig for rulling, men friksjonsarbeidet er oftest neglisjerbart.*  
(Men ved glipp/rutsjing er friksjonen kinematisk og friksjonsarbeidet vesentlig)
- $v = \omega r$   
(dvs. translasjons hastighet = banefart til periferien)
- $E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$   
Med  $I = c m r^2$  og  $\omega = v/r$  :  
 $E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} c m v^2 = \frac{1}{2} m v^2 (1+c)$

# Oppsummering:

## Kap. 9+10. Rotasjon av stive legemer

### Vi har sett på:

- Vinkelhastighet  $\omega = d\theta/dt$ , vinkelakselerasjon  $\alpha = d\omega/dt$
- Sentripetalakselerasjon  $a_c = -r\omega^2 = -v^2/r$
- Baneakselerasjon  $a_\theta = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
- Treghetsmoment  $I = \sum r_i^2 m_i \rightarrow \int r^2 dm$  (om en gitt akse)
- Dreiemoment:  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- Spinn (dreieimpuls) =  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$   
For stivt legeme:  $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$
- Spinnsatsen:  $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$  (Newton 2 for rotasjon)  
For stivt legeme:  $\boldsymbol{\tau} = I d\boldsymbol{\omega}/dt$
- Eksempler: rulling, gyroskop (sykkelhjul), barnekarusell, m.m.

## Kap. 9+10. Analogier translasjons- og rotasjonsbevegelser

Størrelse	Trans	Rot (vektor)	Rot (skalar)
Stedkoord.	$\vec{r}$		$\theta$
Hastighet	$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$	$\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega}$	$\dot{\theta} = \omega$
Akselerasjon	$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$	$\ddot{\vec{\theta}} = \vec{\alpha}$	$\ddot{\theta} = \alpha$
“Kraft”	$\vec{F}$	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\tau = rF \sin \theta$
“Masse”	$m$		$I = \int r^2 dm$
“Bev.mengde”	$\vec{p} = m \dot{\vec{r}}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I \vec{\omega}$	$L = rp \sin \theta = I \omega$
Kin. energi	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$		$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
Arbeid	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$	$dW = \tau d\theta$
Effekt	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$	$P = \tau \omega$
Newton 2	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = I \ddot{\vec{\theta}}$	$\tau = I \ddot{\theta}$
Newton 1	$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{konst}$	$\vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{konst}$	

# Konstant-akselerasjonslikninger

Translasjon:  
(konstant akselerasjon  $a$ )

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

Rotasjon:  
(konstant baneakselerasjon  $\alpha$ )

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

Tregghetsmoment (om en gitt akse):

$$I = \sum r_i^2 m_i \rightarrow \int r^2 dm$$

- Alle  $I$  om massesentrum (cm):
- Ring om sentrum:  $I = M R^2$
- Ring om diameter:  $I = \frac{1}{2} M R^2$
- Sylinder eller skive om sentrum:  $I = \frac{1}{2} M R^2$
- Kule om diameter:  $I = \frac{2}{5} M R^2$
- Kuleskall om diameter:  $I = \frac{2}{3} M R^2$
- Lang, tynn stav om midtpunkt:  $I = \frac{1}{12} M L^2$
- Rektangulær plate om midtpunkt:  $I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$
  
- Om annen parallell akse i avstand  $d$  (Steiners sats):  
$$I = I_{\text{cm}} + M d^2$$
  
- Se også Table 9.2 i Young & Freedman.