

## Kap. 12. Gravitasjon

- Keplers lover for planetbaner
- Newtons gravitasjonslov
- Gravitasjonens potensielle energi.
- Unnslippshastighet

## Kap. 12. Gravitasjonen

### Naturens fire fundamentale krefter (fra kap 4):

- **Gravitasjonskraft**  
– mellom masser
- **Elektromagnetisk kraft**  
– mellom elektriske ladninger
- Sterk kjernekraft
- Svak kjernekraft

### Gravitasjon/solsystemet. Litt historie:

**100: Ptolemaios:** Jorda i sentrum (geosentrisk). Ulike kuleskall der fiksstjerner og planeter (vandrestjerner) plasseres.

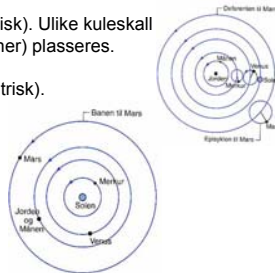
**1500: Copernicus:** Sola i sentrum (heliosentrisk). Sirkelbaner for alle planeter.

**1600: Tycho Brahe → Johannes Kepler:** Elliptiske baner for alle planeter. Keplers tre lover.

Så langt bare beskrivelser av observasjoner. Matematisk beskrivelse og grunnleggende lover:

**1687: Isaac Newton:** Matematisk beskrivelse av Keplers observasjoner i hans kjente verk "The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy". Bl.a. gravitasjonsloven.

**1916: Albert Einstein:** Den generelle relativitetsteorien. Sorte hull.



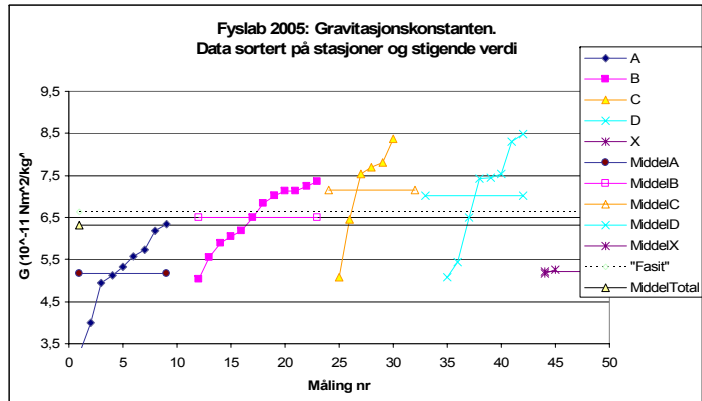
### Keplers 3. lov:

Forholdet mellom kvadratet av omløpstida  $T$  og tredje potens av banens store halvakse  $r$  er lik for alle planetene:  $T^2 = C r^3$

Mean Orbital Radii and Orbital Periods for the Planets

Planet	Mean Radius $r$ ( $\times 10^{10}$ m)	Period $T$ (y)	$T^2 / r^3$ ( $10^{-36}$ s <sup>2</sup> /m <sup>3</sup> )
Mercury	5.79	0.241	299
Venus	10.8	0.615	300
Earth	15.0	1.00	296
Mars	22.8	1.88	298
Jupiter	77.8	11.9	301
Saturn	143	29.5	298
Uranus	287	84	299
Neptune	450	165	299
Pluto	590	248	300

### Studenters måling av $G$



Fra Angell & Lian:  
Fysiske størrelser og enheter, s. 15.

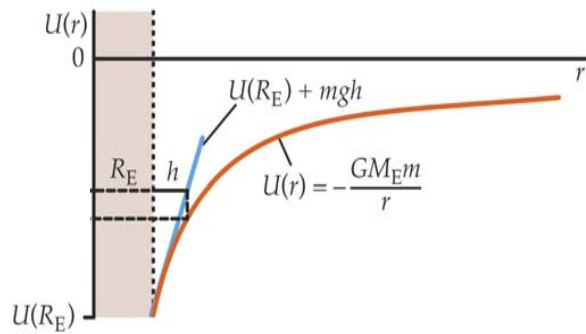
### Noen fysiske konstanter

Verdiene her og ellers i heftet er tatt fra CODATA ~~2002~~<sup>2006</sup> Bulletin 63 (1986). Usikkerheten ligger i de to siste sifrene.

lysfarten i tomt rom	$c$	$\stackrel{\text{def}}{=} 299\,792\,458 \text{ m/s}$
	$c^2$	$= 8,987\,551\,787\,4 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2$
tomromspermeabiliteten, (den magnetiske konstanten)	$\mu_0$	$\stackrel{\text{def}}{=} 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} = 1,256\,637\,061\,4 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$
tomromspermittiviteten, (den elektriske konstanten)	$\epsilon_0$	$\stackrel{\text{def}}{=} 1/\mu_0 c^2 = 8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ <del>6,674 28</del> <sup>6,674 28</sup> <del>817</del> <sup>817</sup>
gravitasjonskonstanten	$G, f$	$= 6,672\,59 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
standard tyngdeakselerasjon	$g_n$	$\stackrel{\text{def}}{=} 9,806\,65 \text{ m/s}^2$
Planck-konstanten	$h$	$= 6,626\,075\,5 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4,135\,669\,2 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$ <del>068 96</del> <sup>068 96</sup> <del>069 3</del> <sup>069 3</sup>
	$\hbar$	$\stackrel{\text{def}}{=} h/2\pi = 1,054\,572\,66 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 6,582\,122\,0 \cdot 10^{-16} \text{ eV s}$
elementærladningen	$e$	$= 1,602\,177\,33 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ <del>176 53</del> <sup>176 53</sup> <del>176 487</del> <sup>176 487</sup>
elektronradien	$r_e$	$= \mu_0 e^2 / (4\pi m_e) = 2,817\,940\,92 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ <del>325</del> <sup>325</sup> <del>289 4</del> <sup>289 4</sup>

Fysiske konstanter fra CODATA:  
<http://physics.nist.gov/cuu/Constants>

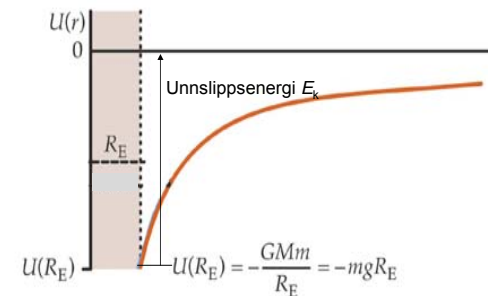
### Potensiell energi $U(r) = E_p(r)$



### Unnslippshastighet (escape speed)

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E}$$

- er uavhengig massen



Tyngdeaksel. og unnslippshastighet:

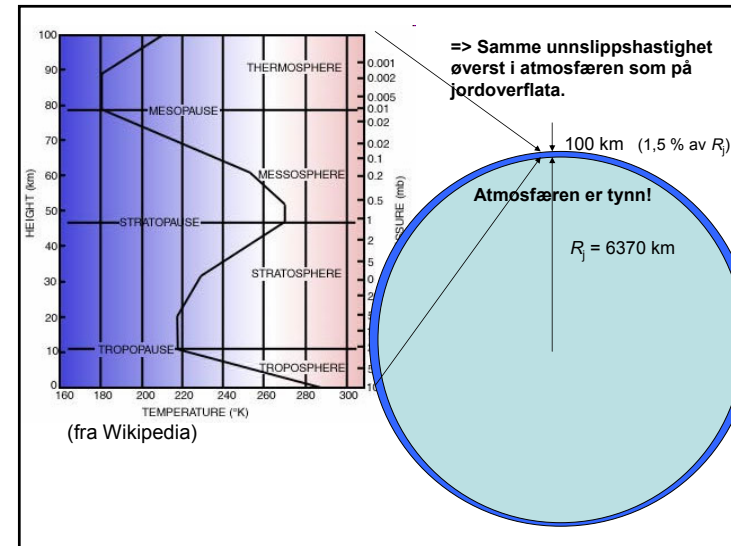
	$g$ (m/s <sup>2</sup> )	$v_0$ (km/s)	atmosfære?
Månen	1,62	2,4	ingen
Mars	3,7	5,0	1 % (CO <sub>2</sub> )
Jorda	9,8	11,2	100 %
Jupiter	23,1	59,5	70 % (H <sub>2</sub> og He)

Middelhastighet  $v_{av}$  ved 0°C:

N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>: 450 m/s  
He: 1,3 km/s

**Konklusjon:**  
En viss andel He har  $v > 11,2$  km/s => He slipper unna jorda  
≈intet N<sub>2</sub> og O<sub>2</sub> har  $v > 11,2$  km/s => slipper ikke unna jorda

**Alle** gasser slipper unna månen og mars.



Gravitasjonskrefter utenfor ( $r > R$ ) og inni ( $r < R$ ) tynt kuleskall

(a) Geometry of the situation

$dA = (2\pi R \sin \phi)(R d\phi)$

$dM = \frac{M}{A} dA$

Integrert av Newton, og i Y&F kap 12.6:

Utenfor ( $r > R$ ):  $F = -G Mm/r^2$   
Inni ( $r < R$ ):  $F = 0$

Sammenheng potensiell energi og konservativ kraft

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{F} = - \frac{dE_p}{dr} \hat{r}$$

Utenfor kule:

$$F(r) = - \frac{dE_p}{dr} = - \frac{d\left(-G \frac{Mm}{r}\right)}{dr} = G \frac{Mm}{r^2}$$

Inni massiv kule:

$$F(r) = - \frac{dE_p}{dr} = - \frac{d\left(-G \frac{Mm}{2R^3}(3R^2 - r^2)\right)}{dr} = -GMm \frac{r}{R^3}$$

## Kap. 12. Gravitasjon

• Keplers 3 lover for planetbaner:

1. *Ellipser* med sola i ellipsens ene brennpunkt.
2. Like store flatestykker i lik tid => **Spinnsetsen**
3. **lov:**  $T^2 = C r^3$  => **Newtons grav.lov**

• Newtons gravitasjonslov:

$$F = - G Mm/r^2 \quad (\text{punktmasser})$$

• Utenfor sfæriske legemer: som all masse samla i sentrum

• Inni sfæriske legemer:  $F = - G Mm \cdot r/R^3$

• Gravitasjonens potensielle energi:

$$E_p = - G Mm/r$$

• Tyngdens akselerasjon:

$$g = F/m = - G M/r^2 \quad (\approx 9,8 \text{ m/s}^2 \text{ når } r = R_i)$$

• Gravitasjonsmasse (i  $F = - G Mm/r^2$ ) = treg masse (i  $F=ma$ )

## Gravitasjon og Einsteins generelle relativitetsteori:

1. Avbøyning av lys nær planeter/stjerner.
2. Tida går fortere jo sterkere gravitasjonsfeltet er. Frekvensen på lys endres.  
Relativ tidskorreksjon:  $\Delta t/t = \Delta E_p/m \cdot 1/c^2$

Eks: Ved svært sterkt grav.felt slipper ikke lys ut: **SORTE HULL**.  
Jorda med radius 0,88 cm ville gi et sort hull.

## Gravitasjon og Einsteins generelle relativitetsteori:

Tidskorreksjoner ved GPS:

1) Spesiell relativitetsteori:

Korreksjon pga. stor hastighet ( $v/c = 13$  ppm):  
Satelittklokker **saktner 7  $\mu\text{s}$**  per døgn  
(Eksamen 3FY juni 2006)

2) Generell relativitetsteori:

Korreksjon pga. ulik gravitasjon ( $\Delta t/t = \Delta E_p/mc^2$ ):  
Satelittklokker **fortner 45  $\mu\text{s}$**  per døgn

Totalt: Satelittklokker **fortner 38  $\mu\text{s}$**  per døgn  
( $38 \mu\text{s} / 86400 \text{ s} = 4,4 \cdot 10^{-10}$ )

**Løsning:**

GPS-mottakere bruker 10,23000000000 MHz  
Sendefrekvensen til satelitten er 10,22999999543 MHz.

