

Kap. 9+10 Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment τ
- Spinn (dreieimpuls): L
- Spinnsatsen (Newton 2 for rotasjon):
 $\tau = dL/dt$
- Stive legemer: $L = I\omega$ $\tau = I d\omega/dt$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m...

Vinkler måles i radianer:

$$\theta = s/r$$

dvs. $s = \theta r$

Vinkelhastighet:

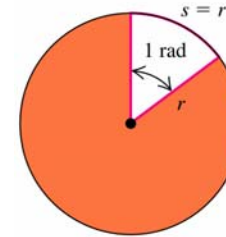
$$\omega = d\theta/dt$$

Banefart

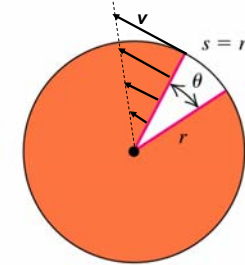
$$v = ds/dt = \omega r \quad (9.13)$$

er lik for hele legemet

øker med radien



(a)



(b)

Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison-Wesley

Rotasjonshjul som energilager

- Stålskive 10 cm tykk, 1,0 m di.

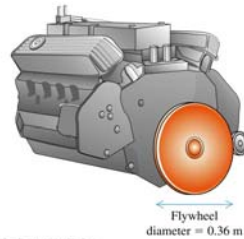
Problem:

Tung! (600 kg) Deformere

I periferien er:

Banefart $v = \omega r = 1000$ m/s

Sentripetalaksel $\omega^2 r = 220$



- Energi ved 20000 RPM (omdr. per min):

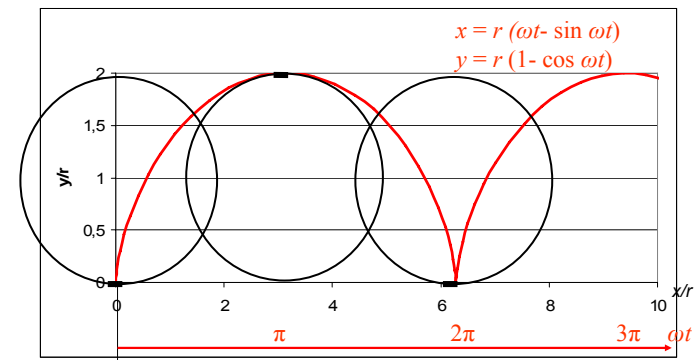
$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = 1,7 \cdot 10^8 \text{ J}$$

- Forbrenningsenergi i bensintank på 40 liter, ved utnyttelse 25%:

$$\text{ca } 4 \cdot 10^8 \text{ J}$$

Sykloide

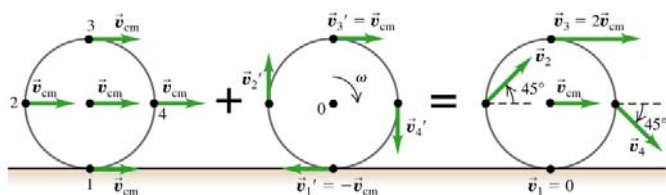
(et punkt på felgen ved rulling)



Rulling (uten å glippe)

$$v_{cm} = \omega r$$

Translasjon + rotasjon = rulling

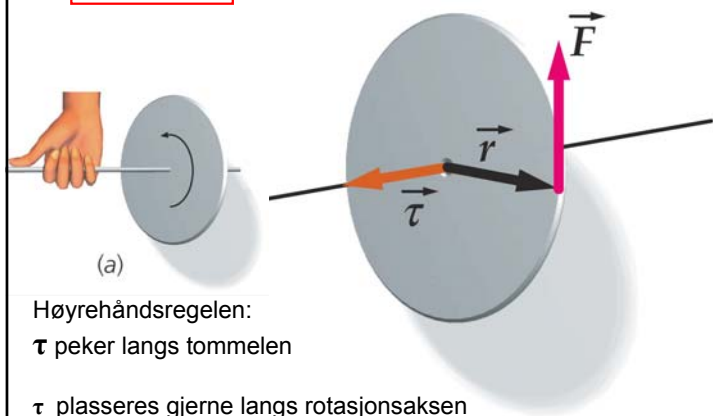


Rått egg - kokt egg.
Hvilket ruller fortest?



- <http://fy.chalmers.se/~perolof/fyslek/>
- (Leksaker | Mekanik | Äggkapplöpning)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

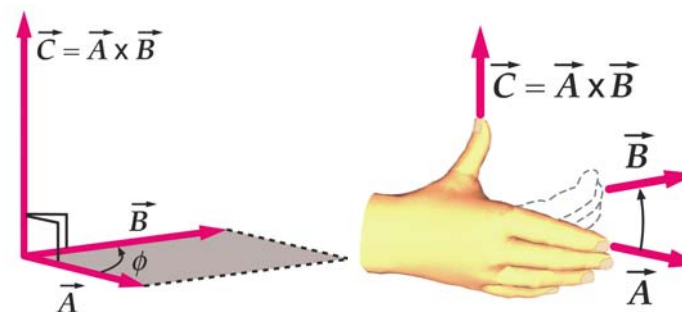


Høyrehåndsregelen:
 $\boldsymbol{\tau}$ peker langs tommelen

$\boldsymbol{\tau}$ plasseres gjerne langs rotasjonsaksen

Vektorkryssprodukt:

Y&F Kap. 1.10



(Kort oppsummering)

Snelle med snor

- Trekkes mot deg ved liten vinkel α
- Trekkes fra deg ved stor vinkel α
- Vi fant: Grense ved $\cos \alpha = r/R$

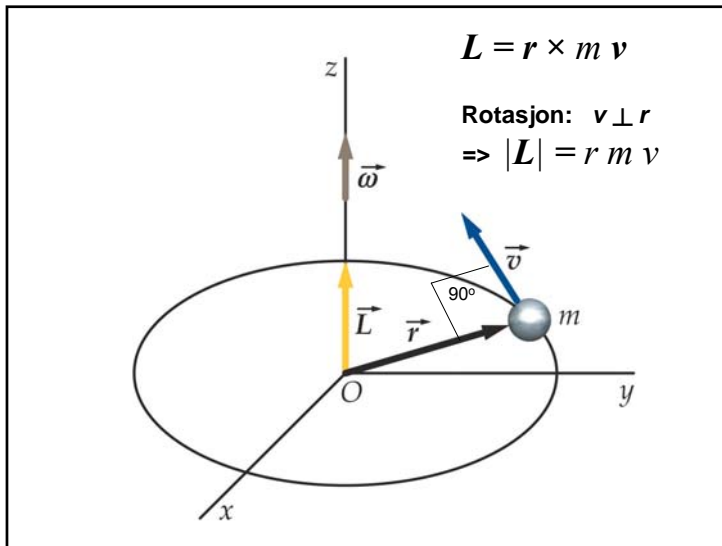
Krav til statisk likevekt:

- Ingen translasjon $\Rightarrow \Sigma \mathbf{F} = 0$
- Ingen rotasjon $\Rightarrow \Sigma \boldsymbol{\tau} = 0$ ($\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$)
 » om **enhver** valgt akse

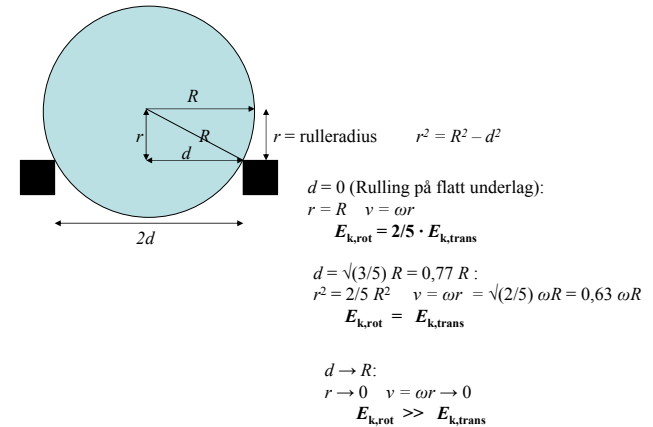
(Statisk) friksjon er vesentlig for rulling, men friksjonsarbeidet er oftest neglisjerbart (rullefriksjon null). (Men ved glipp/rutsjing er friksjonsarbeidet vesentlig).

Fra Angell & Lian: Fysiske størrelser og enheter, s. 42.

p	driv, bevegelsesmengde kg m/s	[momentum] $p = mv$. (I visse deler av teoretisk fysikk blir betegnelsen generalisert impuls brukt både om driv og om impuls.)
I	impuls, kraftstøt Ns = kg m/s	[impulse] $I = \int F dt = \Delta p$. F er kraft og p er driv.
L	spinn, drivmoment, (bevegelsesmengdemoment) kg m ² /s	[moment of momentum, angular momentum]; $L = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. (I avansert fysikk blir betegnelsen generalisert impulsmoment brukt både om spinn og om impulsmoment.)
H	impulsmoment Nms = kg m ² /s	[angular impulse] $H = \int M dt = \Delta L$. M er kraftmoment og L er spinn.
M	kraftmoment	[moment of force] $M = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
M, T	dreiemoment Nm	[torque] For spesielle kraftmoment blir det ofte bruk egne navn, som bøymoment [bending moment] M , vrilmoment og torsjonsmoment T [twisting, torsional moment] og kraftparmoment M [moment of a couple].
k	stivhet, fjærstivhet N/m	$F = -kx$



Rulleradius mindre enn ytre radius



Punktpartikkel:

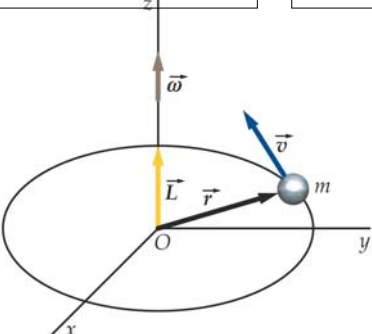
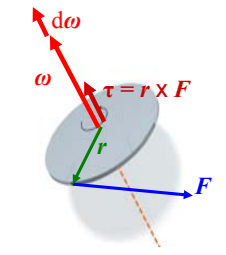
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$$

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

Stivt legeme:

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{\tau} = I d\boldsymbol{\omega}/dt$$

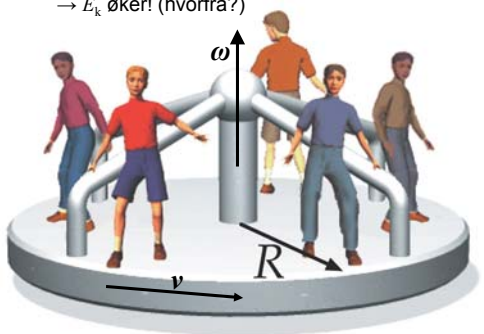



Raskere rotasjon om samme akse:
 $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \boldsymbol{\omega} + d\boldsymbol{\omega}$ alle i samme retning
 (N2-rot): $\boldsymbol{\tau} dt = I d\boldsymbol{\omega}$
 $\Rightarrow \boldsymbol{\tau}$ i samme retning som $d\boldsymbol{\omega}$
 $\Rightarrow \mathbf{F}$ som i figuren

Hva hvis akseretningen skal endres?

Spinn: $L = I\omega$ **Konstant!**
 Personer inn mot sentrum $\rightarrow I = \sum m_i r_i^2$ avtar Ikke stivt legeme!
 $\rightarrow \omega$ må øke!

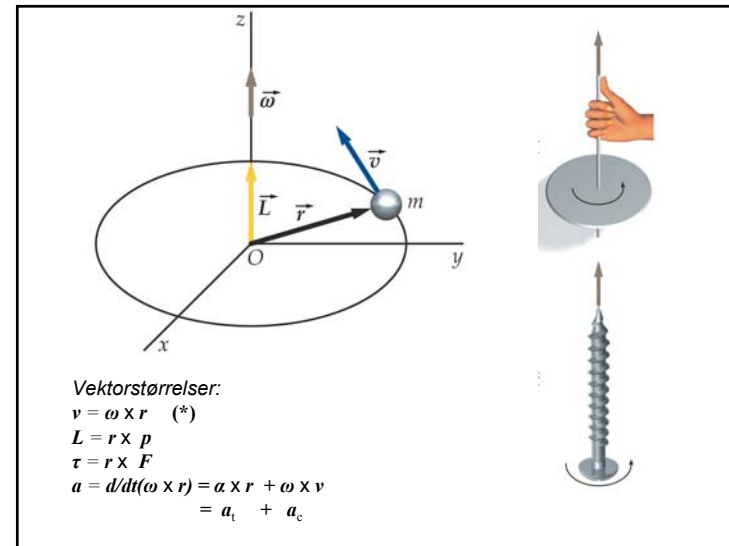
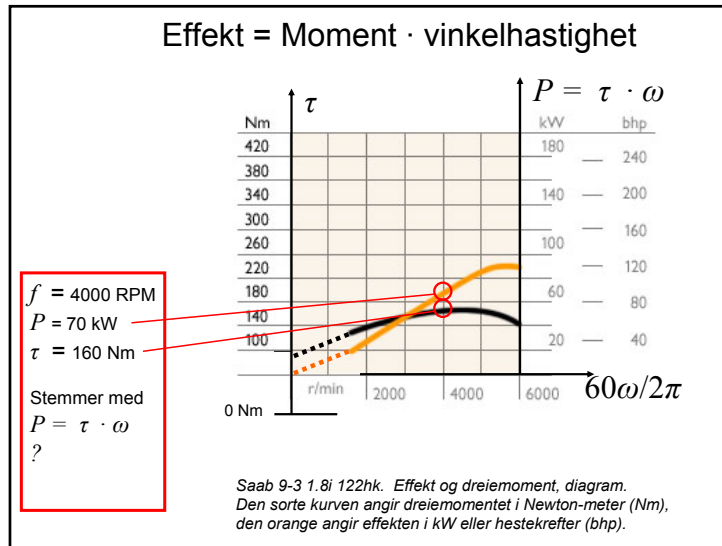
Kinetisk energi: $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} L \omega$
 $\rightarrow L$ konstant, ω øker
 $\rightarrow E_k$ øker! (hvorfra?)



Katter lander - alltid på føttene!



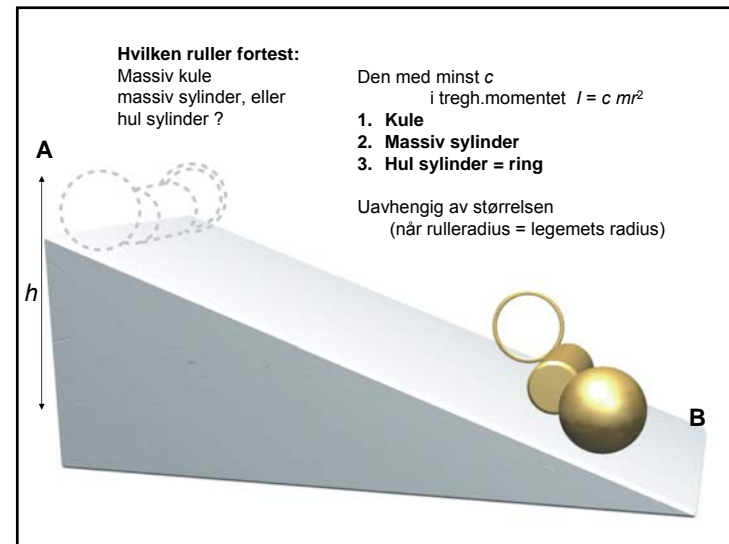

Bilder fra:
http://www.cds.caltech.edu/~mleok/falling_cats.htm



Oppsummering:

Rulling (dvs. uten glipping)

- Statisk friksjon er vesentlig for rulling, men friksjonsarbeidet er oftest neglisjerbart.
 (Men ved glipp/rutsjing er friksjonen kinematisk og friksjonsarbeidet vesentlig)
- $v = \omega r$
 (dvs. translasjonshastighet = banefart til periferien)
- $E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$
 Med $I = c m r^2$ og $\omega = v/r$:
 $E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} c m v^2 = \frac{1}{2} m v^2 (1+c)$



Konstant-akselerasjonslikninger

Translasjon:
(konstant akselerasjon a)

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

Rotasjon:
(konstant vinkelakselerasjon α)

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

Oppsummering:

Kap. 9+10. Rotasjon av stive legemer

Vi har sett på:

- Vinkelhastighet $\omega = d\theta/dt$, vinkelakselerasjon $\alpha = d\omega/dt$
- Sentripetalakselerasjon $a_c = -r \omega^2 = -\omega v = -v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
- Tregghetsmoment $I = \sum r_i^2 m_i \rightarrow \int r^2 dm$ (om en gitt akse)
- Dreiemoment: $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- Spinn (dreieimpuls) = $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$
For stivt legeme: $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$
- Spinnsatsen: $\tau = dL/dt$ (Newton 2 for rotasjon)
For stivt legeme: $\tau = I d\omega/dt$
- Eksempler: rulling, gyroskop (sykkelhjul), barnekarusell, m.m.

Kap. 9+10. Analogier translasjons- og rotasjonsbevegelser

Størrelse	Trans	Rot (vektor)	Rot (skalar)
Stedkoord.	\vec{r}		θ
Hastighet	$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$	$\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega}$	$\dot{\theta} = \omega$
Akselerasjon	$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$	$\ddot{\vec{\theta}} = \vec{\alpha}$	$\ddot{\theta} = \alpha$
"Kraft"	\vec{F}	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\tau = rF \sin \theta$
"Masse"	m		$I = \int r^2 dm$
"Bev.mengde"	$\vec{p} = m \dot{\vec{r}}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I \vec{\omega}$	$L = rps \sin \theta = I \omega$
Kin. energi	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$		$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
Arbeid	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$	$dW = \tau d\theta$
Effekt	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$	$P = \tau \omega$
Newton 2	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = I \ddot{\vec{\theta}}$	$\tau = I \ddot{\theta}$
Newton 1	$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{konst}$	$\vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{konst}$	

Tregghetsmoment (om en gitt akse):

$$I = \sum r_i^2 m_i \rightarrow \int r^2 dm$$

- Alle I om massesentrum (cm):
- Ring om sentrum: $I = MR^2$
- Ring om diameter: $I = \frac{1}{2} MR^2$
- Sylinder eller skive om sentrum: $I = \frac{1}{2} MR^2$
- Kule om diameter: $I = (2/5) MR^2$
- Kuleskall om diameter: $I = (2/3) MR^2$
Rullende legemer: $I = c mR^2$ ($c=1, 1/2, 2/5$ etc.)
- Lang, tynn stav om midtpunkt: $I = (1/12) ML^2$
- Rektangulær plate om midtpunkt: $I = (1/12) M(a^2 + b^2)$
- Om annen parallell akse i avstand d (Steiners sats):
 $I = I_{cm} + M d^2$
- Se også Table 9.2 i Young & Freedman.