Kap. 9+10
Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:

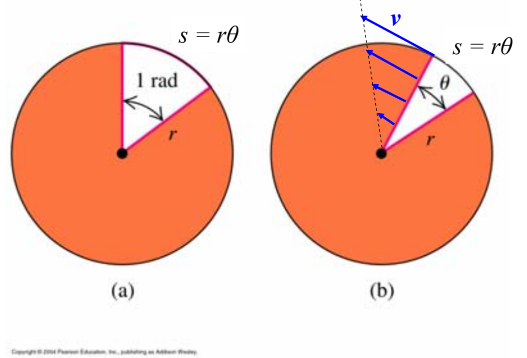
- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Rulling
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- Spinnsatsen (Newton 2 for rotasjon):

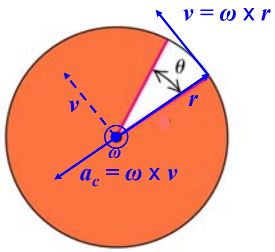
$$\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$$

- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$ $\quad \boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

Vinkelhastighet:
$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$
er lik for hele legemet

Banefart
$v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = r\,\omega$ (9.13)
øker med radien





- Translasjon: $E_k = \frac{1}{2}\, m\, v^2$

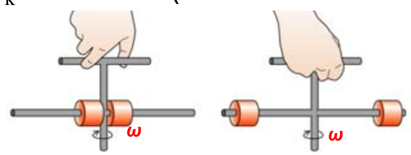
Massens plassering ingen betydning for E_k

Samme $\boldsymbol{v}$, samme E_k

- Rotasjon: $E_k = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2$

der $I = \int r^2\, \mathrm{d}m$

E_k øker med (massens avstand)^2 fra aksen

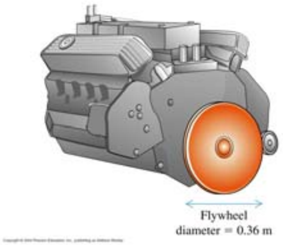


Samme $\boldsymbol{\omega}$, men ulik E_k

Rotasjonshjul som energilager

- Stålskive 10 cm tykk, 1,0 m di

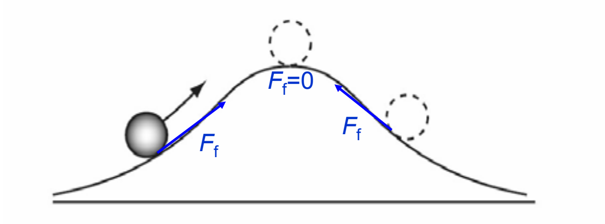
Problem:
Tung! (600 kg)   Deformere
I periferien er:
Banefart $v = \omega r = 1000$ m/s
Sentripetalaksel $\omega^2 r = 220$



- Energi ved 20000 RPM (omdr. per min):
  $E_k = ½\, I\, \omega^2$ = 170 ·MJ
- Forbrenningsenergi i bensintank på 40 liter,
  ved utnyttelse 33%:   ca 530 MJ

Oppgave

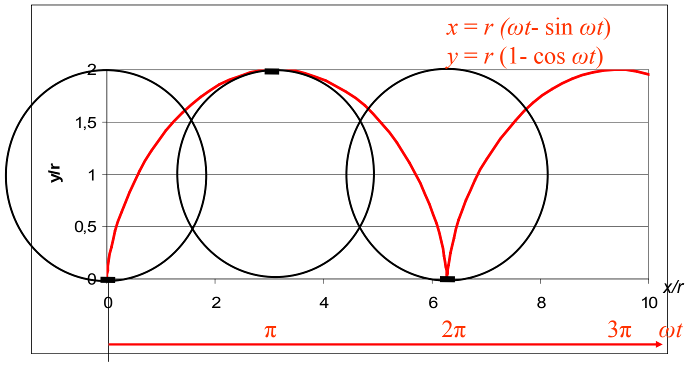
Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.



Kun F_f gir moment til rotasjonen

Sykloide

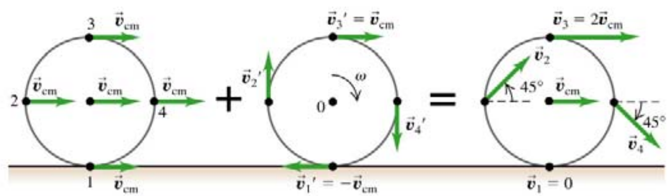
(et punkt på felgen ved rulling)



Rulling (uten å glippe)

$v_{cm} = \omega\, v$ Eksamensoppgave des. 2007

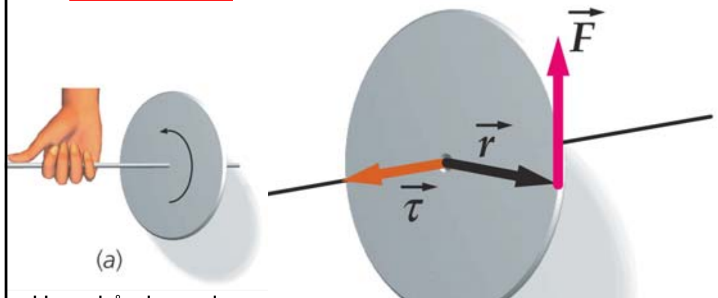
Translasjon + rotasjon = rulling



Rått egg - kokt egg.
Hvilket ruller fortest?

- http://fy.chalmers.se/~perolof/fyslek/
- (Leksaker | Mekanik | Äggkapplöpning)

$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}}$

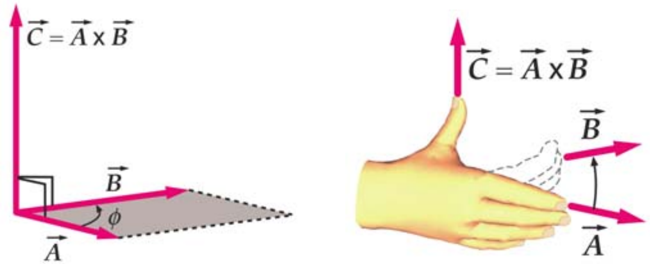


Høyrehåndsregelen:

$\boldsymbol{\tau}$ peker langs tommelen

τ plasseres gjerne langs rotasjonsaksen

Vektorkryssprodukt: Y&F Kap. 1.10



Bruker sjelden komponentform:

$$\vec{A} \times \vec{B} = [A_x, A_y, A_z] \times [B_x, B_y, B_z] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

(Kort oppsummering)

Snelle med snor

- Trekkes mot deg ved liten vinkel α
- Trekkes fra deg ved stor vinkel α
- Vi fant: Grense ved $\cos \alpha = r/R$
- Krav til statisk likevekt:
  - Ingen translasjon => Σ ***F*** = 0
  - Ingen rotasjon => $\Sigma\, \boldsymbol{\tau} = 0$ $(\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})$
    - » om **enhver valgt** akse

(Statisk) friksjon er vesentlig for rulling,
*men friksjons**arbeidet** er oftest neglisjerbart (rullefriksjon null).*
(Men: Slure/skli => friksjonsarbeidet er vesentlig).

Fra Angell & Lian: Fysiske størrelser og enheter, s. 42.

p	**driv, bevegelsesmengde** kg m/s	[momentum] $p = mv$. (I visse deler av teoretisk fysikk blir betegnelsen generalisert impuls brukt både om driv og om impuls.)
I	**impuls, kraftstøt** Ns = kg m/s	[impulse] $I = \int F\mathrm{d}t = \Delta p$. F er kraft og p er driv.
L	**spinn, drivmoment, (bevegelsesmengde-moment)** kg m²/s	[moment of momentum, angular momentum], $L = r \times p = r \times mv$. (I avansert fysikk blir betegnelsen generalisert impulsmoment brukt både om spinn og om impulsmoment.)
H	**impulsmoment** Nms = kg m²/s	[angular impulse] $H = \int M\mathrm{d}t = \Delta L$. M er kraftmoment og L er spinn.
M	**kraftmoment**	[moment of force] $M = r \times F$
M, T	**dreiemoment** Nm	[torque] For spesielle kraftmoment blir det ofte bruk egne navn, som bøyemoment [bending moment] M, vrimoment og torsjonsmoment T [twisting, torsional moment] og kraftparmoment M [moment of a couple].
k	**stivhet, fjærstivhet** N/m	$F = -kx$

42

Spinn: $L = I\,\omega$ **Konstant!**

Personer inn mot sentrum → $I = \Sigma\, m_i\, r_i^2$ avtar

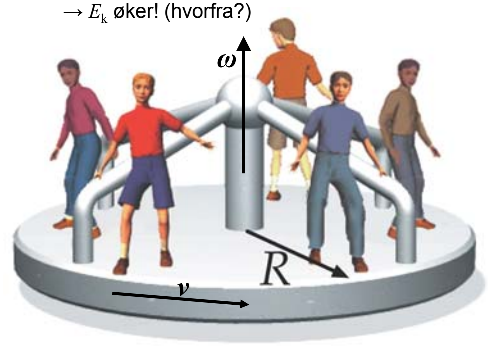
→ ω må øke!

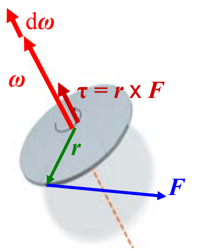
Ikke stivt legeme!

Kinetisk energi: $E_k = ½\, I\, \omega^2 = ½\, L\, \omega$

→ L konstant, ω øker

→ E_k øker! (hvorfra?)





Raskere rotasjon om samme akse:

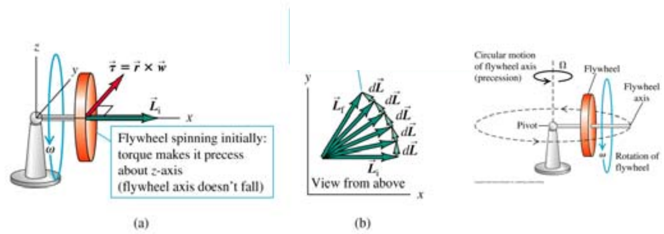
$\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{\omega} + \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ alle i samme retning

(N2-rot): $\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}t = I\ \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$

=> $\boldsymbol{\tau}$ i samme retning som $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$

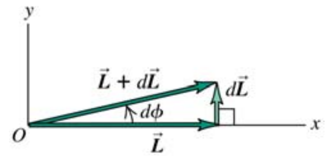
=> $\boldsymbol{F}$ som i figuren

Hva hvis akseretningen skal endres?



$$\mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{d}L}{L}$$

$$\Omega_p = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\frac{1}{L} = \tau\frac{1}{L} = \frac{Fr}{I\omega}$$

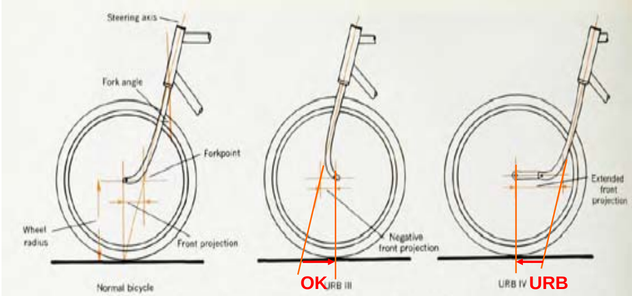


Matematisk forklaring av fysikken ofte eneste mulige

Richard Feynman (am. fysiker/pedagog, 1918-1988):

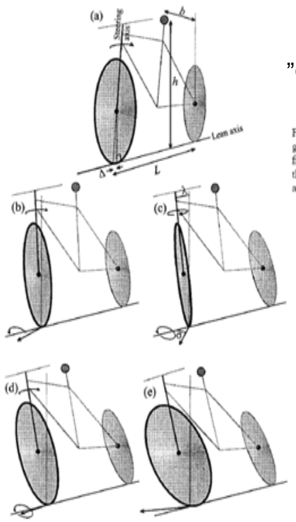
”…many simple things can be deduced mathematically more rapidly than they can really be understood in a fundamental or simple sense. This is a strange characteristic, and as we get into more and more advanced work there are circumstances in which mathematics will produce results which *no one* has really been able to understand in any direct fashon.”

URB = UnRidableBicycle!?



FRONT-FORK GEOMETRY. On left is a normal bicycle. Center shows URB III with reversed forks giving a negative front projection, and on right is URB IV with extended front projection. —FIG. 2

D.E.H. Jones. Physics Today, April 1970



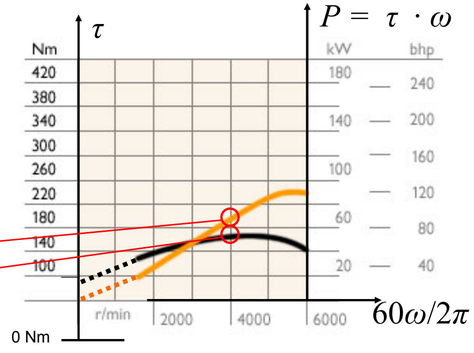
”Counter-steering”

Fig. 1. A counter-steered right turn, as described in the text. The bike geometry is shown in (a) and (c). The center of mass is represented by the filled circle at the location of the seat. The arcs around the steering axis and the lean axis show the direction and approximate magnitude of the torque applied to the handlebars and the net leaning torque.

Effekt = moment · vinkelhastighet

f = 4000 RPM
P = 70 kW
τ = 160 Nm

Stemmer med
$P = \tau \cdot \omega$
?



Saab 9-3 1.8i 122hk. Effekt og dreiemoment, diagram. Den sorte kurven angir dreiemomentet i newton-meter (Nm), den orange angir effekten i kW eller hestekrefter (bhp).

Konstant-akselerasjonslikninger

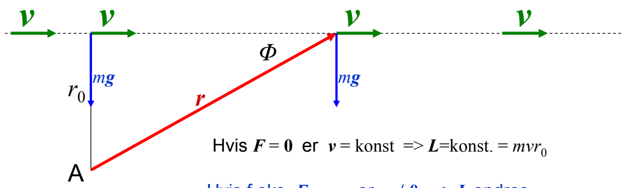
Translasjon: (konstant akselerasjon a)	Rotasjon om fast akse: (konstant vinkelakselerasjon α)
$v = v_0 + a \cdot t$	$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$
$s = s_0 + v_0 \cdot t + ½\, a\, t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + ½\, \alpha\, t^2$
$v^2 - v_0^2 = 2as$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$
$s - s_0 = \langle v \rangle t = ½(v+v_0)\, t$	$\theta - \theta_0 = \langle \omega \rangle t = ½(\omega+\omega_0)\, t$

Translasjon:	**Rotasjon:**
Bevegelsesmengde (linear momentum): $\boldsymbol{p} = m\, \boldsymbol{v}$	Spinn (angular momentum): $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{L} = I\, \boldsymbol{\omega}$ Stivt legeme
N2-trans: $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ "Stivt" legeme (konst. m): $\boldsymbol{F} = m\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = m\, \boldsymbol{a}$	N2-rot (spinnsatsen): $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ Stivt legeme (konst. I): $\boldsymbol{\tau} = I\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t = I\, \boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{F} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{p}$ = konstant (N1) "stivt" legeme: $\boldsymbol{v}$ = konst	$\boldsymbol{\tau} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L}$ = konstant (N1-rot) stivt legeme: $\boldsymbol{\omega}$ = konst

Spinn ved translasjon

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v}$$

$$|\boldsymbol{L}| = r\, m\, v \sin \Phi$$

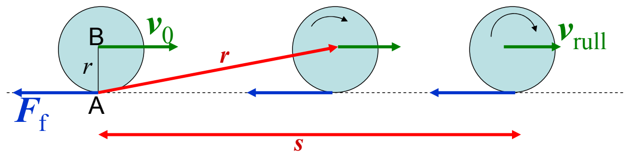


Hvis $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ er $\boldsymbol{v}$ = konst => $\boldsymbol{L}$=konst. = mvr_0

Hvis f.eks. $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ er $\tau \neq \boldsymbol{0}$ => $\boldsymbol{L}$ endres

Bowlingkule

Skli: $\omega = 0$ | $\omega < v/r$ | Rulle: $\omega = v/r$



$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v} + I\boldsymbol{\omega}$$

Om A: L_A = konst. = mrv_0 fordi F_f har null moment om A
start = slutt => $v_{\text{rull}} = v_0 \cdot 5/7$ (*) -- uten å kjenne F_f !

Om B: $\boldsymbol{L}_B = I\boldsymbol{\omega}$ **ikke** konstant fordi $\tau_f = F_f \cdot r$
=> $I\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = F_f \cdot r$

Oppsummering:

Kap. 9+10. Rotasjon av stive legemer

Vi har sett på:

- Vinkelhastighet $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$, vinkelakselerasjon $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
- Sentripetalakselerasjon $a_c = -r\,\omega^2 = -\omega v = -v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi $E_k = ½\, I\, \omega^2$
- Treghetsmoment $I = \Sigma\, r_i^2\, m_i \rightarrow \int r^2\, \mathrm{d}m$ (om en gitt akse)
- Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
- Spinn (dreieimpuls) = $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v}$
  For stivt legeme: $\boldsymbol{L} = I\, \boldsymbol{\omega}$
- Spinnsatsen: $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ (Newton 2 for rotasjon)
  For stivt legeme: $\boldsymbol{\tau} = I\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: rulling, gyroskop (sykkelhjul), barnekarusell, m.m.

Kap. 9+10. Analogier translasjons- og rotasjonsbevegelser

Størrelse	Trans	Rot (vektor)	Rot (skalar)
Stedkoord.	$\vec{\boldsymbol{r}}$		θ
Hastighet	$\dot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \vec{\boldsymbol{v}}$	$\dot{\vec{\boldsymbol{\theta}}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}$	$\dot{\theta} = \omega$
Akselerasjon	$\ddot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \vec{\boldsymbol{a}}$	$\ddot{\vec{\boldsymbol{\theta}}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}$	$\ddot{\theta} = \alpha$
"Kraft"	$\vec{\boldsymbol{F}}$	$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$	$\tau = rF\sin\theta$
"Masse"	m		$I = \int r^2 \mathrm{d}m$
"Bev.mengde"	$\vec{\boldsymbol{p}} = m\,\dot{\vec{\boldsymbol{r}}}$	$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}} = I\,\vec{\boldsymbol{\omega}}$	$L = rp\sin\theta = I\,\omega$
Kin. energi	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m\,v^2$		$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}I\,\omega^2$
Arbeid	$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$	$\mathrm{d}W = \vec{\tau} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta}$	$\mathrm{d}W = \tau\,\mathrm{d}\theta$
Effekt	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$	$P = \tau\,\omega$
Newton 2	$\vec{\boldsymbol{F}} = \dot{\vec{\boldsymbol{p}}} = m\,\ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}$	$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\vec{\boldsymbol{L}}} = I\,\ddot{\vec{\boldsymbol{\theta}}}$	$\tau = I\,\ddot{\theta}$
Newton 1	$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{v}} =$ konst	$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{\omega}} =$ konst	

Treghetsmoment (om en gitt akse):

$$I = \Sigma\, r_i^2\, m_i \;\longrightarrow \int r^2\, \mathrm{d}m$$

- Alle I om massesentrum (cm):
- Ring om sentrum: $I = M R^2$
- Ring om diameter: $I = ½\, M R^2$
- Sylinder eller skive om sentrum: $I = ½\, M R^2$
- Kule om diameter: $I = (2/5)\, M R^2$
- Kuleskall om diameter: $I = (2/3)\, M R^2$
  Rullende legemer: $I = c\, mR^2$ (c=1, ½, 2/5 etc.)
- Lang, tynn stav om midtpunkt: $I = (1/12)\, M L^2$
- Rektangulær plate om midtpunkt: $I = (1/12)\, M\,(a^2 + b^2)$
- Om annen parallell akse i avstand d (Steiners sats):
  $I = I_{cm} + M\, d^2$
- Se også Table 9.2 i Young & Freedman.

Sentrifugehode

Max 65000 RPM ($\omega = 7 \cdot 10^3$ 1/s)

Sentripetalakselerasjon $\omega^2 r = 380000$ x g ved $r = 8$ cm

Banefart ytterst: $v = \omega r = 550$ m/s

Energi $E_k = ½\, I\, \omega^2 = 245$ kJ
(med $I = 2/5\, Mr^2 = 10 \cdot 10^{-3}$ kgm^2 , kule, 3,9 kg)
= 1000 W i 245 s (4 min)
(tilsvarer v=360 m/s = 1300 km/t ved translasjon samme kule)

100 g slenges ut med kraft 38 tonn!