

Kap. 12. Gravitasjon

- Keplers lover for planetbaner
- Newtons gravitasjonslov
- Gravitasjonens potensielle energi.
- Unnslippshastighet

Kap. 12. Gravitasjonen

Naturens fire fundamentale krefter (fra kap 4):

- **Gravitasjonskraft**
– mellom masser
- **Elektromagnetisk kraft**
– mellom elektriske ladninger
- Sterk kjernekraft
- Svak kjernekraft

Gravitasjon/solsystemet. Litt historie:

100: Ptolemaios: Jorda i sentrum (geosentrisk). Ulike kuleskall der fiksstjerner og planeter(vandrestjerner) plasseres.

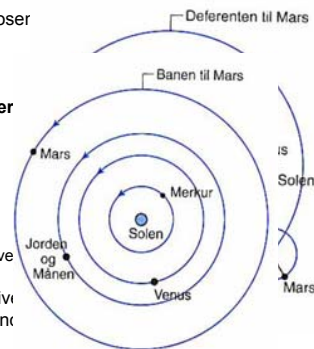
1500: Copernicus: Sola i sentrum (helioser) Sirkelbaner for alle planeter.

1600:  Tycho Brahe og Johannes Kepler

Så langt bare beskrivelser av observasjoner. Matematisk beskrivelse og grunnleggende love

1687: Isaac Newton: Matematisk beskriv kjente verk **Principia:** "Mathematical Prin gravitasjonsloven.

1916: Albert Einstein: Den generelle relativitetsteorien. Sorte hull.



Keplers 1. lov:

Planetbanene er *ellipser* med sola i ellipsens ene brennpunkt.

Keplers 2. lov:

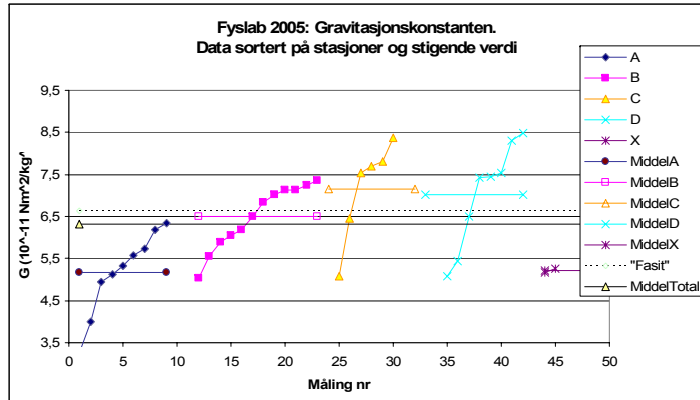
Posisjonsvektoren fra sola til planeten dekker like store flatestykker av ellipsens areal i like store tidsrom.

Keplers 3. lov:

Forholdet mellom kvadratet av omløpstida T og tredje potens av banens store halvakse r er lik for alle planetene.

$$T^2 = C r^3$$

Studenters måling av G



Fra Angell & Lian:
Fysiske størrelser og enheter,
s. 15.

2. utgave 1994

4. utgave 2004

Noen fysiske konstanter

Verdiene her og ellers i heftet er tatt fra CODATA ²⁰⁰⁶ ~~2002~~ ~~Bulletin 63 (1986)~~. Usikkerheten ligger i de to siste sifrene.

lysfarten i tomt rom	c	$\stackrel{\text{def}}{=} 299\,792\,458 \text{ m/s}$
	c^2	$= 8,987\,551\,787\,4 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2$
tomromspermeabiliteten, (den magnetiske konstanten)	μ_0	$\stackrel{\text{def}}{=} 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} = 1,256\,637\,061\,4 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$
tomromspermittiviteten, (den elektriske konstanten)	ϵ_0	$\stackrel{\text{def}}{=} 1/\mu_0 c^2 = 8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ 6,674 28 818 6,674 2 817
gravitasjonskonstanten	G, f	$= 6,672\,59 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
standard tyngdeakselerasjon	g_n	$\stackrel{\text{def}}{=} 9,806\,65 \text{ m/s}^2$
Planck-konstanten	h	$= 6,626\,075\,5 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4,135\,669\,2 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$ $\hbar \stackrel{\text{def}}{=} h/2\pi = 1,054\,572\,66 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 6,582\,122\,0 \cdot 10^{-16} \text{ eV s}$
elementærladningen	e	$= 1,602\,177\,33 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ 176 53 176 487
elektronradien	r_e	$= \mu_0 e^2 / (4\pi m_e) = 2,817\,940\,92 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ 325 289 4

Fysiske konstanter fra CODATA:

<http://physics.nist.gov/cuu/Constants>

Newtons gravitasjonslov

$$F = -G m M / r^2 \quad (12.1)$$

Utleddning basert på:

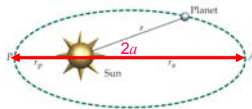
Gravitasjonskraft = Sentripetalkraft

sirkelbane: $G m M / r^2 = m \omega^2 r = m 4\pi^2 / T^2 r$
 $\Rightarrow T^2 = (4\pi^2 / GM) r^3$ (\approx Kepler 3)

ellipsebane (Newton viste):

$$T^2 = (4\pi^2 / GM) a^3 \quad (= \text{Kepler 3})$$

a = banens store halvakse



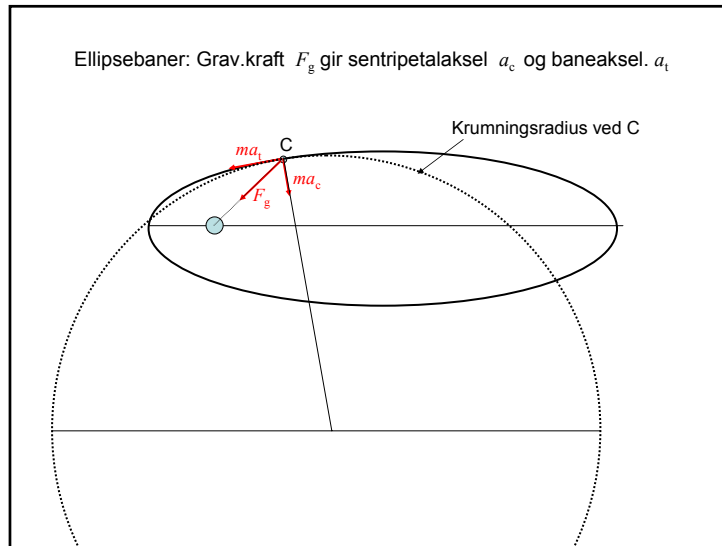
Keplers 3. lov:

Forholdet mellom kvadratet av omløpstida T og tredje potens av banens store halvakse a

er lik for alle planetene: $T^2 = C a^3$

Mean Orbital Radii and Orbital Periods for the Planets

Planet	Mean Radius r ($\times 10^{10} \text{ m}$)	Period T (y)	T^2 / a^3 ($10^{-36} \text{ s}^2/\text{m}^3$)
Mercury	5.79	0.241	299
Venus	10.8	0.615	300
Earth	15.0	1.00	296
Mars	22.8	1.88	298
Jupiter	77.8	11.9	301
Saturn	143	29.5	298
Uranus	287	84	299
Neptune	450	165	299
Pluto	590	248	300



Kap. 12. Gravitasjon

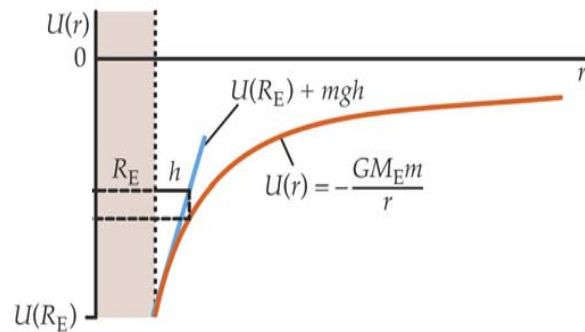
- Keplers 3 lover for planetbaner:
 1. *Ellipser* med sola i ellipsens ene brennpunkt.
 2. Like store flatestykker i lik tid \Rightarrow **Spinnsatsen**
 3. lov: $T^2 = C^3$ \Rightarrow **Newtons grav.lov**
- Newtons gravitasjonslov:

$$F = -G m_1 m_2 / r^2 \quad (\text{punktmasser}) \quad (12.1)$$

Utenfor sfæriske legemer: som all masse samla i sentrum
 Infinitesimalregning: Isaac Newton / Gottfried Leibniz
- Om kjeglesnitt (ellipser, parabler, hyperbler) i MA1102 (2.sem)
 - <http://www.math.ntnu.no/emner/MA1102/2008v/pensum.imf>
 - <http://www.math.ntnu.no/emner/MA1102/2008v/notater/kepler.pdf>
- Gravitasjonens potensielle energi:

$$E_p = -G m_1 m_2 / r$$

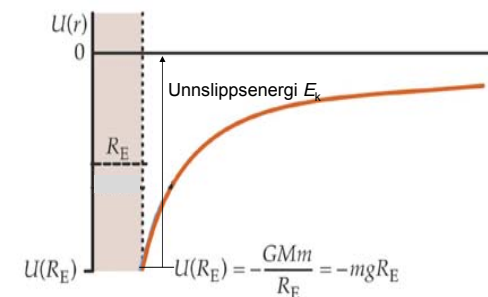
Potensiell energi $U(r) = E_p(r)$



Unnslippshastighet (escape speed)

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E}$$

- er uavhengig massen



Tyngdeaksel. og unnslippshastighet:

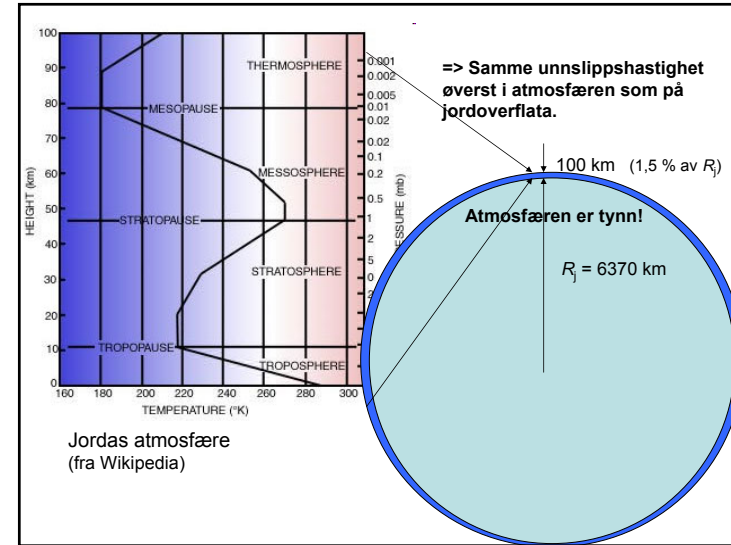
	g (m/s ²)	v_0 (km/s)	atmosfære?
Månen	1,62	2,4	ingen
Mars	3,7	5,0	1 % (CO ₂)
Jorda	9,8	11,2	100 %
Jupiter	23,1	59,5	70 % (H ₂ og He)

≈ **Alle** gasser slipper unna månen og mars.

Middelhastighet v_{av} ved 0°C:

N₂, O₂: $v_{av} = 450$ m/s
 He: $v_{av} = 1,3$ km/s

Konklusjon:
 ≈ intet N₂ og O₂ har $v > 11,2$ km/s => slipper ikke unna jorda
 En viss andel He har $v > 11,2$ km/s => He slipper unna jorda



Gravitasjonskrefter utenfor og inni tynt kuleskall

Integrert av Newton, og i Y&F kap 12.6:

Utenfor kula ($r > R$):

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (12.24)$$

$$\Rightarrow F = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{GMm}{r^2}$$

(som all masse i sentrum)

Inni kula ($r < R$):

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{R} \quad (12.26)$$

$$\Rightarrow F = -\frac{dE_p}{dr} = 0$$

(som ingen masse)

Sammenheng potensiell energi og konservativ kraft

$$E_p = -\int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr} \hat{r}$$

Utenfor kule:

$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{d\left(-G\frac{Mm}{r}\right)}{dr} = -G\frac{Mm}{r^2}$$

Inni massiv kule:

$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{d\left(-G\frac{Mm}{R} \frac{1}{2} \left[3 - \frac{r^2}{R^2}\right]\right)}{dr} = -G\frac{Mm}{R^3} r$$

Kap. 12. Gravitasjon

• Keplers 3 lover for planetbaner:

1. *Ellipser* med sola i ellipsens ene brennpunkt.
2. Like store flatestykker i lik tid => **Spinnetsatsen**
3. **lov:** $T^2 = C r^3$ => **Newtons grav.lov**

• Newtons gravitasjonslov:

$$F = - G Mm/r^2 \quad (\text{punktmasser})$$

- Utenfor sfæriske legemer: som all masse samla i sentrum
- Inni massive sfæriske legemer: $F = - G Mm \cdot r/R^3$

• Gravitasjonens potensielle energi:

$$E_p = - G Mm/r$$

• Tyngdens akselerasjon:

$$g = F/m = - G M/r^2 \quad (\approx 9,8 \text{ m/s}^2 \text{ når } r = R_i)$$

• Gravitasjonsmasse (i $F = - G Mm/r^2$) = treg masse (i $F=ma$)

Gravitasjon og Einsteins generelle relativitetsteori:

1. Avbøyning av lys nær planeter/stjerner.

2. Tida går fortere jo sterkere gravitasjonsfeltet er. Frekvensen på lys endres.

$$\text{Relativ tidskorreksjon: } \frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta E_p}{mc^2}$$

Eks: Ved svært sterkt grav.felt slipper ikke lys ut: **SORTE HULL.**

(unnslippshastighet > lysfarten)

Jorda masse med radius 0,88 cm ville gi et sort hull.

Gravitasjon og Einsteins generelle relativitetsteori:

Tidskorreksjoner ved GPS:

1) Den spesielle relativitetsteorien =>

Korreksjon pga. stor hastighet ($v/c = 13 \text{ ppm}$):
Satelittklokker **sakner 7 μs** per døgn
(Eksamen 3FY juni 2006)

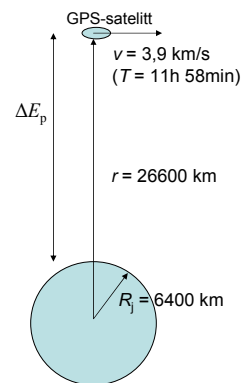
2) Den generelle relativitetsteorien =>

Korreksjon pga. ulik gravitasjon ($\Delta t/t = \Delta E_p/mc^2$):
Satelittklokker **fortner 45 μs** per døgn

Totalt: Satelittklokker **fortner 38 μs** per døgn
($38 \mu\text{s} / 86400 \text{ s} = 4,4 \cdot 10^{-10}$)

Løsning:

GPS-mottakere bruker 10,23000000000 MHz
Sendefrekvensen til satelitten er 10,22999999543 MHz.



Jordrotasjonen og Foucaults pendel

Rotasjonstid for Foucaultpendelen:

Polene: 24 timer

Ekvator: ∞ (ingen rotasjon)

Breddegrad φ : 24 h/sin φ

Breddegrad 63,4°: 26 h 45'

