

### Kap. 8

Bevegelsesmengde. Flerpartikkelsystem.

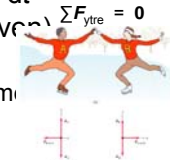
**Vi skal se på:**

- Newtons 2. lov på ny.
- Definisjon bevegelsesmengde.
- Kraftstøt, impuls. Impulsloven.
- **Flerpartikkelsystemer:**
- Kollisjoner:
  - Elastisk, uelastisk, fullstendig uelastisk
- Massefellespunkt
- Rakettlikningen (variabel masse)

### Kap. 8

Bevegelsesmengde. Flerpartikkelsystem.

- Bevegelsesmengde:  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$
- Opprinnelig form Newton 2:  $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$
- Kraftstøt =  $\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p}$  (impulsloven)  $\sum \mathbf{F}_{\text{ytre}} = 0$
- Ingen ytre krefter =>  $\mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{konstant}$ 
  - Kraftstøt motsatt like stort på hvert legem
- **Flerpartikkelsystem:**
- Kollisjoner:
  - Elastisk, uelastisk, fullstendig uelastisk
  - Ikke-sentralt støt (Ex. 8.12 i Y&F)
- Massefellespunkt (Y&F 8.5)
- Ikke konstant masse: Rakettlikningen (Y&F 8.6)



- Kollisjoner skjer så raskt at vi *kan se bort fra* ytre krefter under kollisjonen

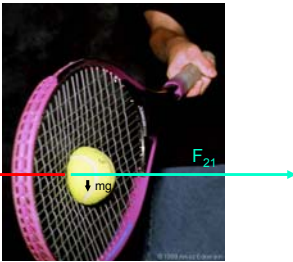
**Eksempel tennisballen:**

$m = 56 \text{ g}$   
 $v = 50 \text{ m/s} \rightarrow v = -50 \text{ m/s}$   
 på  $t = 0,010 \text{ s}$

Vi fant:

$F_{\text{av}} = \Delta p / \Delta t = 560 \text{ N}$   
 $F_{\text{max}} \approx 1000 \text{ N}$

Ytre kraft = tyngde =  $mg = 0,55 \text{ N}$   
 er forsvinnende liten



### Sentralt elastisk støt

$v_A, v_B = \text{fart før støt}$   
 $v_A', v_B' = \text{fart etter støt}$

**Generell løsning:**

$$v_A' = \frac{(m_A - m_B)v_A + 2m_B v_B}{m_A + m_B} \quad (103)$$

$$v_B' = \frac{(m_B - m_A)v_B + 2m_A v_A}{m_B + m_A} \quad (104)$$

### Y&F: Ex. 8.8: Fullstendig uelastisk støt

**BEFORE COLLISION**

$m_B$   $v_1$   $m_A$

**IMMEDIATELY AFTER COLLISION**

$m_B + m_A$   $v' = v_1' = v_2'$

TOP OF SWING

To ukjente:  
 $v_1$  og fellesfarten  $v' = v_1' = v_2'$

To likninger:  
 Impulsbevarelse **under** støtet og energibevarelse **etter** støtet

### Delvis uelastisk støt

$m_1$   $v_1$   $v_{1f} = \frac{1}{2} v_{1i}$   $v_2$   $v_1'$

Tre ukjente: Før støt:  $v_1$ . Etter støt:  $v_1'$  og  $v_2'$

To likninger: Impulsbevarelse **under** støtet og energibevarelse **etter** støtet.

Tilleggsopplysning: F.eks. oppgitt kulas fart etter støtet:  $v_1' = \frac{1}{2} v_1$  (evt. kunne tap i energi være oppgitt)

### Ikke-sentralt støt, to like kuler

$v_1$   $b$   $2R$   $\alpha$   $v_1' \sin \alpha$   $v_1' \cos \alpha$   $\beta$   $v_2' \cos \beta$   $-v_2' \sin \beta$   $v_2'$   $v_1'$   $\alpha$   $\beta$

$b =$  støtparameteren

$\sin \beta = b/2R$

### Ikke-sentralt støt, to like kuler

$b \rightarrow 0$   $b \rightarrow 2R$

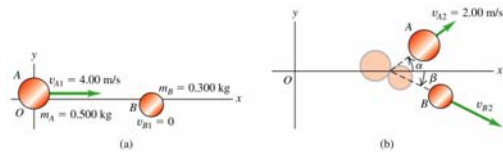
$\alpha \rightarrow 90$   $\beta \rightarrow 0$   $\alpha \rightarrow 0$   $\beta \rightarrow 90$

$\approx$  sentralt  $v_2' \approx v_1$  så vidt touch  $v_1' \approx v_1$

Alltid  $v_1' \perp v_2'$

### Ikke-sentralt støt

- Kollisjon skjer ikke langs éi linje



Hvis kule B ikke i ro før støt:  
Legg inn koord.system som følger kule B før støtet.

### Massefellespunkt

- **Punktpartikkel:** all masse i ett punkt
- **Flerpartikkelsystem:**  
Legeme =  $\sum$  punktpartikler  
(nødvendig mhp. rotasjon, bøyning, deformasjon)
- **Massefellespunkt:**

• Topartikkelsyst. 
$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$

• N-partikkelsyst. 
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (8.29)$$

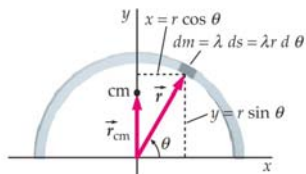
• Kontinuerlig 
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm \quad (8.29B)$$

- **Tyngdepunkt = massefellespunkt**  
dersom tyngdeaksel. **g** er lik over hele legemet

### Eks. Massefellespunkt

#### Eks. 1. Halvsirkel

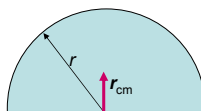
$dm = \lambda ds$   
 $[\lambda] = \text{kg} / \text{m}$



$y_{cm} = r \cdot 2/\pi = 0,64 r$

#### Eks. 2. Halv sirkelplate:

$dm = \sigma dA$   
 $[\sigma] = \text{kg} / \text{m}^2$

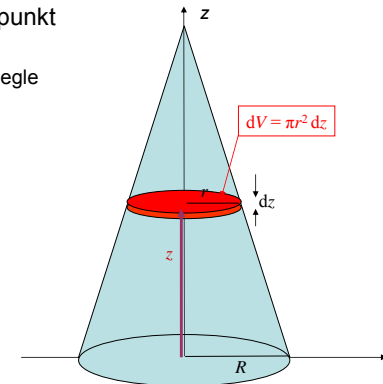


$y_{cm} = r \cdot 4/(3\pi) = 0,42 r$

### Massefellespunkt

#### Eks. 3. Rett kjegle

$dm = \rho dV$   
 $[\rho] = \text{kg} / \text{m}^3$



$z_{cm} = H/4$

### Massefellespunkt

- Topartikkelsystem  $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$
- N-partikkelsystem  $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$  (8.29)

- Kontinuerlig  $\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm$  (8.29B)

1-dim: Integrasjon langs linje:  $dm = \lambda ds$ . Eks:



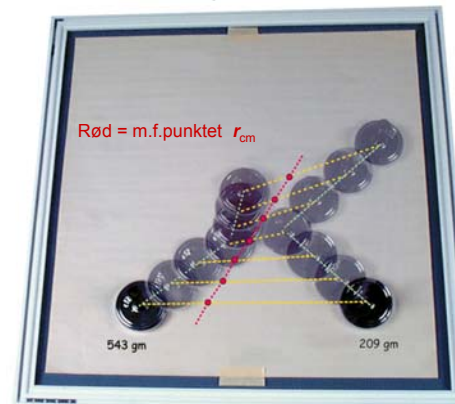
2-dim: Integrasjon over plan:  $dm = \sigma dA$ . Eks:



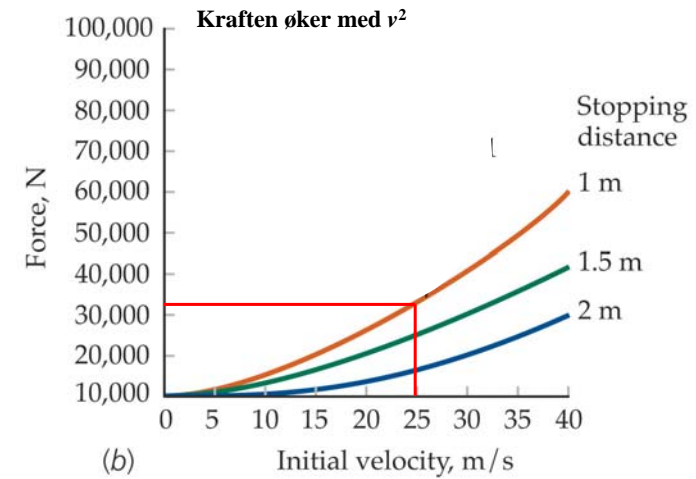
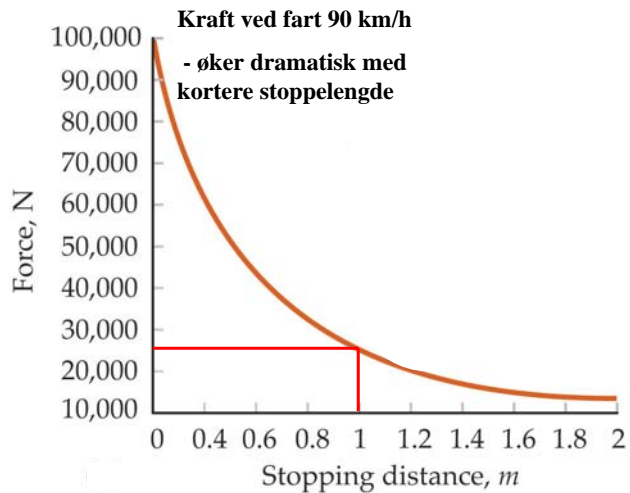
3-dim: Integrasjon over volum:  $dm = \rho dV$ . Eks:



### Fullstendig elastisk støt



Ingen ytre krefter =>  $M \frac{d}{dt} \vec{r}_{cm} = \vec{F}_{ext} = 0$   
=> Massefellespunktet  $\vec{r}_{cm}$  fortsetter upåvirket under støtet.  
Relativbevegelsen (gult) endres under støtet.



## Kritiske akselerasjoner ved kollisjoner

Hjernen mest følsom.

Avhengig av akselerasjonen (antall  $g$ ) og tida den virker:

- 150 x  $g$  i få ms: Dødelig
- 50 x  $g$ : 20-30 ms kan tåles.
- "Severity index"  $= I = \int (a/g)^{5/2} dt$   
 $I = 1000$  s gir 50/50 sjanse overleve

Essensielt å stoppe over lengst mulig tid og distanse.

- f.eks. deformerbart frontparti, .... og
- sikkerhetsbelte
- kollisjonspuuter (ingen skarpe kanter => lite trykk)

## Kap. 8. Bevegelsesmengde. Flerpartikkelsystem

- Bevegelsesmengde:  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$
- Opprinnelig form Newton 2:  $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$
- Kraftstøt =  $\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p}$  (impulsloven)
- Antar ingen ytre krefter (i bevegelsesretning) under støt:
  - Bevegelsesmengde  $\mathbf{p}_{tot}$  er bevart
  - *Tilleggslikninger:*
  - Elastisk støt: Kinetisk energi bevart
  - Fullstendig uelastisk støt: Felles slutfart. (Energi avtar)
  - Uelastisk støt: Ingen generell tilleggslikning. (Energi avtar)
- For ikke-sentrale støt bestemmer *støtparameteren* vinkler
- Massefellespunkt  $\mathbf{r}_{cm} = \int \mathbf{r} dm / M$ . Relativkoordin.  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$
- Newtons lov for massefellespunkt:  $\sum \mathbf{F}_{ext} = m \mathbf{a}_{cm}$
- Rakettilikningen:  $\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{v}_{rel} dm/dt = m d\mathbf{v}/dt$

## Massefellespunkt

- *Punktpartikkel*: all masse i ett punkt
- *Flerpartikkelsystem*:  
 Legeme =  $\sum$  punktpartikler  
 (nødvendig mhp. rotasjon, bøyning, deformasjon)

- *Massefellespunkt*:  

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$

- Topartikkelsyst. 
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (8.29)$$

- Kontinuerlig 
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm \quad (8.29B)$$

- *Tyngdepunkt = massefellespunkt*  
 dersom tyngdeaksel.  $\mathbf{g}$  er lik over hele legemet