

## Kap. 9+10 Rotasjon av stive legemer

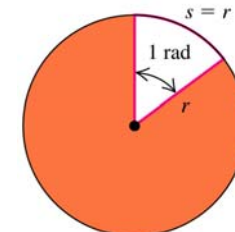
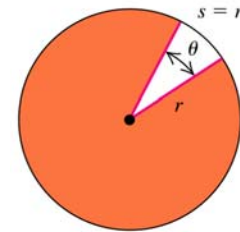
**Vi skal se på:**

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi  $E_k$
- Tregghetsmoment  $I$
- Rulling
- Kraftmoment  $\tau$
- Spinn (dreieimpuls):  $L$
- Spinnsatsen (Newton 2 for rotasjon):  
 $\tau = dL/dt$
- Stive legemer:  $L = I\omega$ ,  $\tau = I d\omega/dt$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m...

Vinkler måles i radianer:

$$\theta = s/r$$

dvs.  $s = r\theta$

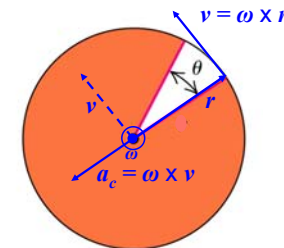
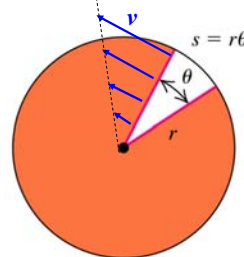


Vinkelhastighet:

$$\omega = d\theta/dt$$

Vinkelhastighet:  
 $\omega = d\theta/dt$   
er lik for hele legemet

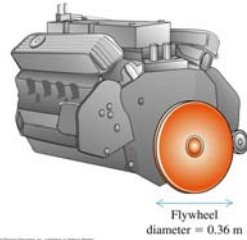
Banefart  
 $v = ds/dt = r\omega$  (9.13)  
øker med radien



## Rotasjonshjul som energilager

- Stålskive 10 cm tykk, 1,0 m di.

**Problem:**  
 Tung! (600 kg) Deformere  
 I periferien er:  
 Banefart  $v = \omega r = 1000$  m/s  
 Sentripetalaksel  $\omega^2 r = 220$



- Energi ved 20000 RPM (omdr. per min):  
 $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = 170$  MJ
- Forbrenningsenergi i bensintank på 40 liter, ved utnyttelse 33%: ca 530 MJ

## Kap. 9. Rotasjon av stive legemer

### Vi har sett på:

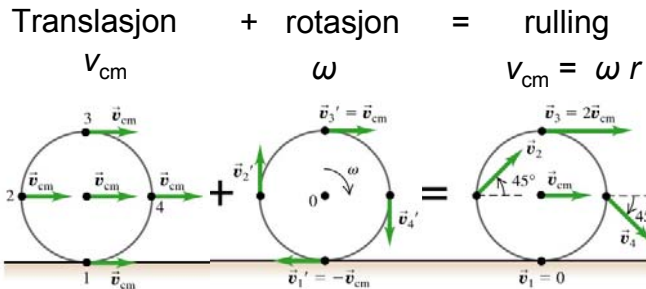
- Vinkelhastighet  $\omega = d\theta/dt$ , vinkelakselerasjon  $\alpha = d\omega/dt$
- Sentripetalaks.  $a_c = -r\omega^2 = -\omega v = -v^2/r$
- Baneakselerasjon  $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
- Tregghetsmoment  $I = \sum r_i^2 m_i = \int r^2 dm$  (om en gitt akse)
  - Ring om sentrum:  $I = M R^2$
  - Skive om sentrum:  $I = \frac{1}{2} M R^2$
  - Lang, tynn stav om midtpunkt:  $I = (1/12) M L^2$

Vektorer:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$   
 $\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

- Steiners sats (parallellakse teoremet):  
 Tregghetsmoment om annen parallell akse i avstand  $d$ :  
 $I = I_{cm} + M d^2$   
 dvs.  $I_{cm}$  er alltid det **minste** mulige treg.moment

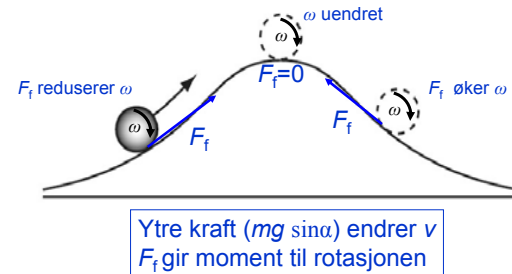
[http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel\\_axes\\_rule](http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_axes_rule)

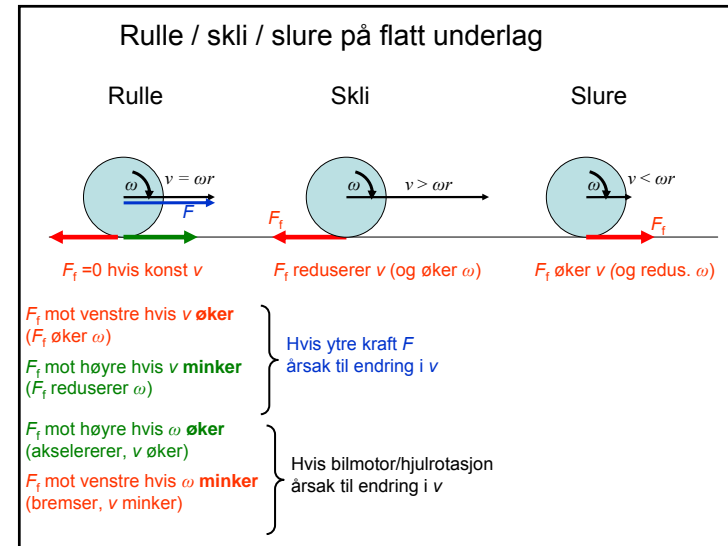
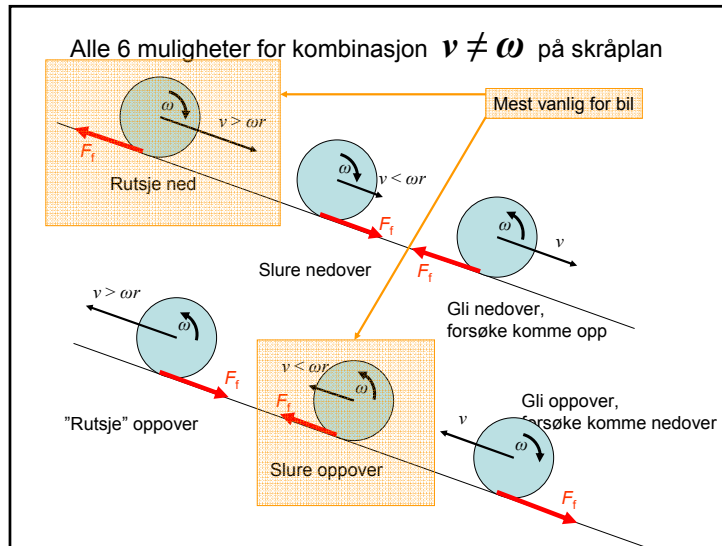
## Rulling (uten å glippe)



## Oppgave

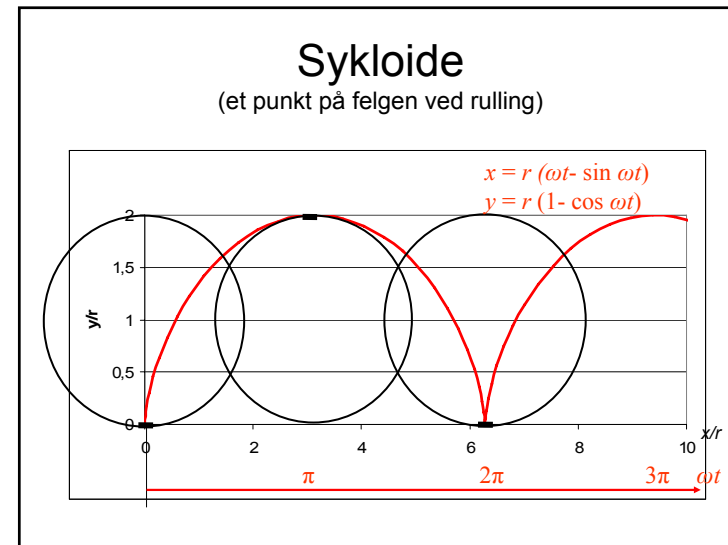
Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.





Rått egg - kokt egg.  
Hvilket ruller fortest?

- <http://fy.chalmers.se/~perolof/fyslek/>
- (Leksaker | Mekanik | Äggkapplöpning )



**$\tau = r \times F$**

Høyrehåndsregelen:  
 $\tau$  peker langs tommelen

$\tau$  plasseres gjerne langs rotasjonsaksen

Husk også vektor  $\omega$  :

(a)

Vektorkryssprodukt: Y&F Kap. 1.10

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

Bruker sjelden komponentform:

$$\vec{A} \times \vec{B} = [A_x, A_y, A_z] \times [B_x, B_y, B_z] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Enhver kraft på ethvert legeme har kraftmoment om en valgt akse. Altså  $\tau$  ikke bare ved rotasjon, men mest nyttig ved rotasjon.

**$\tau = r \times F$**   
 $|\tau| = r F \sin\phi$   
 $\tau \perp r$  og  $\tau \perp F$

Ingen vanskelige anvendelser 😊

**(Kort oppsummering)**

**Snelle med snor**

- Trekkes mot deg ved liten vinkel  $\alpha$
- Trekkes fra deg ved stor vinkel  $\alpha$
- Vi fant: Grense ved  $\cos \alpha = r/R$

• Krav til statisk likevekt:

- Ingen translasjon  $\Rightarrow \sum \vec{F} = 0$
- Ingen rotasjon  $\Rightarrow \sum \vec{\tau} = 0$  ( $\tau = r \times F$ )
- » om enhver valgt akse

(Statisk) friksjon er vesentlig for rulling, men friksjonsarbeidet er oftest neglisjerbart (rullefriksjon null). (Men: Slure/skli  $\Rightarrow$  friksjonsarbeidet er vesentlig).

Fra Angell & Lian:  
Fysiske størrelser  
og enheter,  
s. 42.

$p$	driv, bevegelsesmengde kg m/s	[momentum] $p = mv$ . (I visse deler av teoretisk fysikk blir betegnelsen generalisert impuls brukt både om driv og om impuls.)
$I$	impuls, kraftstøt Ns = kg m/s	[impulse] $I = \int F dt = \Delta p$ . $F$ er kraft og $p$ er driv.
$L$	spinn, drivmoment, (bevegelsesmengdemoment) kg m <sup>2</sup> /s	[moment of momentum, angular momentum], $L = r \times p = r \times mv$ . (I avansert fysikk blir betegnelsen generalisert impulsmoment brukt både om spinn og om impulsmoment.)
$H$	impulsmoment Nms = kg m <sup>2</sup> /s	[angular impulse] $H = \int M dt = \Delta L$ . $M$ er kraftmoment og $L$ er spinn.
$M$	kraftmoment	[moment of force] $M = r \times F$
$M, T$	dreiemoment Nm	[torque] For spesielle kraftmoment blir det bruk egne navn, som bøyemoment [bending moment] $M$ , vrilmoment og torsjonsmoment $T$ [twisting, torsional moment] og kraftparmoment $M$ [moment of a couple].
$k$	stivhet, fjærstivhet N/m	$F = -kx$

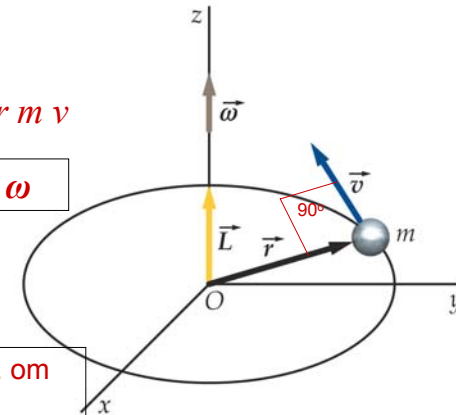
42

### Spinn ved rotasjon

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{r} \Rightarrow |\mathbf{L}| = r m v$$

$$\mathbf{L} = m r^2 \boldsymbol{\omega} = I \boldsymbol{\omega}$$



Stivt legeme, rot. om  
symmetriakse:

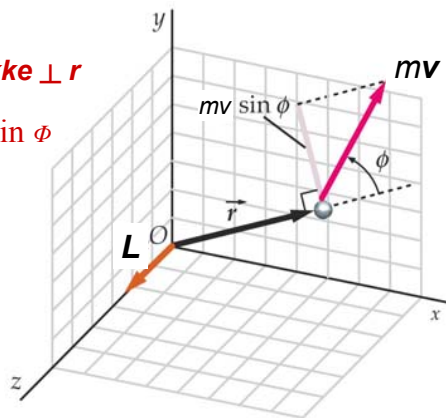
$$\mathbf{L} = \sum m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} = I \boldsymbol{\omega}$$

### Spinn ved translasjon

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$$

Generelt:  $\mathbf{v}$  ikke  $\perp \mathbf{r}$

$$\Rightarrow |\mathbf{L}| = r m v \sin \phi$$



### Kap. 9+10. Rotasjon av stive legemer

- Treghetsmoment  $I = \sum r_i^2 m_i$  (om en gitt akse)
- Rotasjonsenergi  $E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$
- Kraftmoment:  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- Spinn (dreieimpuls)  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = I \boldsymbol{\omega}$
- Spinnsatsen (N2-rot):  $\boldsymbol{\tau} = d/dt \mathbf{L} = I d/dt \boldsymbol{\omega}$
- Ingen ytre moment:  $\mathbf{L} = \text{konst.}$

stive legemer:

$$= I \boldsymbol{\omega}$$

$$= I d/dt \boldsymbol{\omega}$$

**Punktpartikkel:**

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

$$\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$$

**Stivt legeme:**

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

$$\vec{\tau} = I d\vec{\omega}/dt$$

**Spinn:  $L = I \omega = \text{konstant!}$**

Persone inn mot sentrum:  $I = \sum m_i r_i^2$  avtar  $\omega$  må øke! Ikke stivt legeme!

Kinetisk energi:  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} L \omega$

- $L$  konstant,  $\omega$  øker
- $E_k$  øker! (hvorfra?)

### Ubalansert roterende hjul

STATIC IMBALANCE

"Sentrifugalkraft" på akslingen

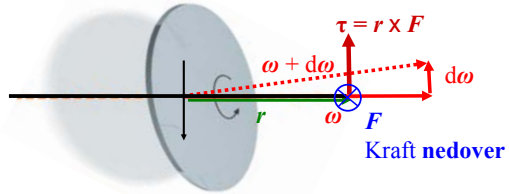
DYNAMIC IMBALANCE

Mer sammensatt kraft på akslingen

Raskere rotasjon om samme akse:  
 $\omega \rightarrow \omega + d\omega$  alle i samme retning  
 (N2-rot):  $\tau dt = I d\omega$   
 $\Rightarrow \tau$  i samme retning som  $d\omega$   
 $\Rightarrow F$  som i figuren

Hva hvis akseretningen skal endres?

### Endring av akseretning Sett ovenfra:



Endring akseretning:  
 $\omega \rightarrow \omega + d\omega$

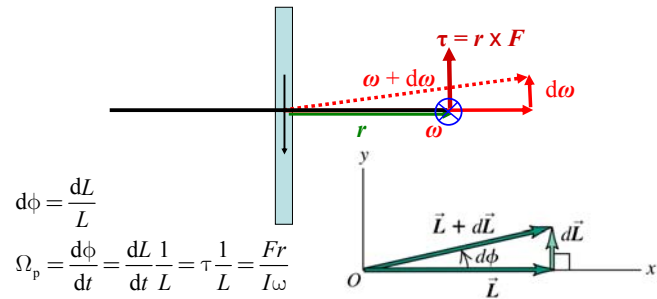
(N2-rot):  $\tau dt = I d\omega$   
 $\Rightarrow \tau$  i samme retning som  $d\omega$   
 $\Rightarrow F$  nedover

### Gyroskop

1. Lodd holder hjulet i balanse
2.  $I\omega$  holdes konstant når roterer  
 $\rightarrow$  gyrokompass
3. Stor motstand mot endring
4. Endring av akseretning ved kraft normalt på endringen

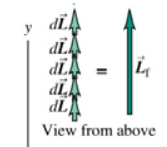
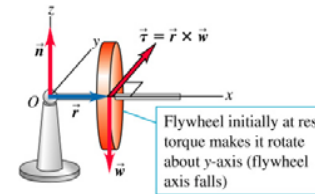


### Med vedvarende $F$ får vi presesering

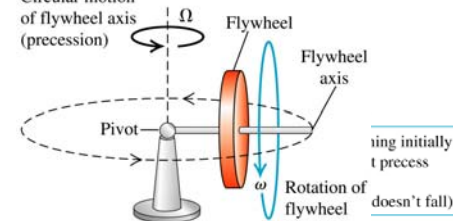


### Sykelhjul

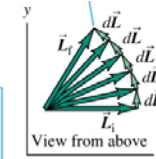
Ikke-roterende hjul:



Circular motion of flywheel axis (precession)



Sett ovenfra:

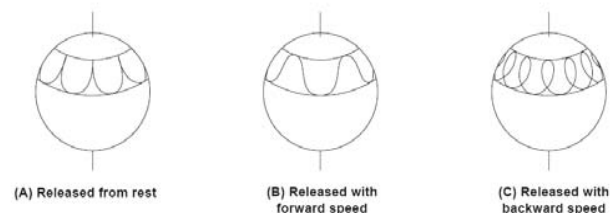


### Matematisk forklaring av fysikken ofte eneste mulige

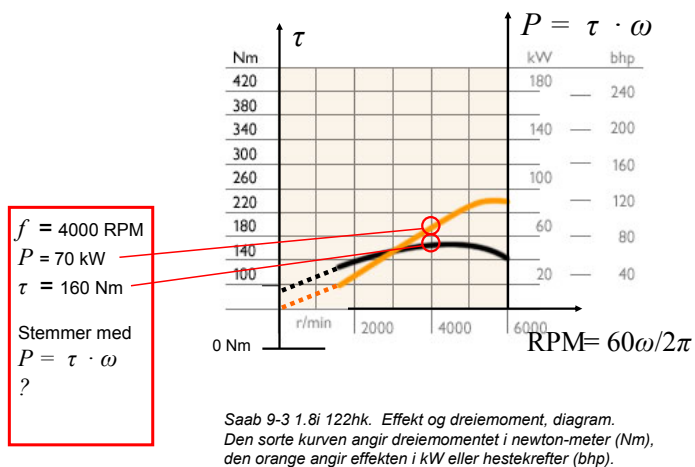
Richard Feynman (am. fysiker/pedagog, 1918-1988):

"...many simple things can be deduced mathematically more rapidly than they can really be understood in a fundamental or simple sense. This is a strange characteristic, and as we get into more and more advanced work there are circumstances in which mathematics will produce results which *no one* has really been able to understand in any direct fashion."

### Nutasjon



### Effekt = moment · vinkelhastighet



### Oppsummering:

#### Rulling (dvs. uten glipping)

- Statisk friksjon er vesentlig for rulling, men friksjonsarbeidet er oftest neglisjerbart.  
(Men ved glipp/rutsjing er friksjonen kinematisk og friksjonsarbeidet vesentlig)
- $v = \omega r$   
(dvs. translasjonshastighet = banefart til periferien)
- $E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$   
Med  $I = c m r^2$  og  $\omega = v/r$  :  
 $E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} c m v^2 = \frac{1}{2} m v^2 (1+c)$



### Rulleradius $r <$ ytre radius $R$

$r = \text{rulleradius}$       $r^2 = R^2 - d^2$   
 $r = R \sin \theta$

$d = 0$  (Rulling på flatt underlag):  
 $r = R$       $v = \omega r$   
 $E_{k,rot} = 2/5 \cdot E_{k,trans}$

$d = \sqrt{3/5} R = 0,77 R$  :  
 $r^2 = 2/5 R^2$       $v = \omega r = \sqrt{2/5} \omega R = 0,63 \omega R$   
 $E_{k,rot} = E_{k,trans}$

$d \rightarrow R$ :  
 $r \rightarrow 0$       $v = \omega r \rightarrow 0$   
 $E_{k,rot} \gg E_{k,trans}$

Eks: Rulling i renne

**Vektorstørrelser:**  
 $v = \omega \times r$  (\*)  
 $L = r \times p$   
 $\tau = r \times F$   
 $a = d/dt(\omega \times r) = a \times r + \omega \times v$   
 $= a_t + a_c$

### URB = UnRidableBicycle!?

**FRONT-FORK GEOMETRY.** On left is a normal bicycle. Center shows URB III with reverted forks giving a negative front projection, and on right is URB IV with extended front projection. —FIG. 2

D.E.H. Jones. Physics Today, April 1970

### "Counter-steering"

Fig. 1. A counter-steered right turn, as described in the text. The bike geometry is shown in (a) and (c). The center of mass is represented by the filled circle at the location of the seat. The arcs around the steering axis and the lean axis show the direction and approximate magnitude of the torque applied to the handlebars and the net leaning torque.

### Konstant-akselerasjonslikninger

**Translasjon:**  
(konstant akselerasjon  $a$ )

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

$$s - s_0 = \langle v \rangle t = \frac{1}{2}(v + v_0) t$$

**Rotasjon om fast akse:**  
(konstant vinkelakselerasjon  $\alpha$ )

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

$$\theta - \theta_0 = \langle \omega \rangle t = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0) t$$

### Translasjon:

Bevegelsesmengde  
(linear momentum):  
 $p = m v$

N2-trans:

$$F = dp/dt$$

"Stivt" legeme (konst.  $m$ ):

$$F = m dv/dt = m a$$

$$F = 0 \Rightarrow p = \text{konstant (N1)}$$

"stivt" legeme:  $v = \text{konst}$

### Rotasjon:

Spinn  
(angular momentum):  
 $L = r \times m v$

$$L = I \omega \text{ Stivt legeme}$$

N2-rot (spinnseten):

$$\tau = dL/dt$$

Stivt legeme (konst.  $I$ ):

$$\tau = I d\omega/dt = I \alpha$$

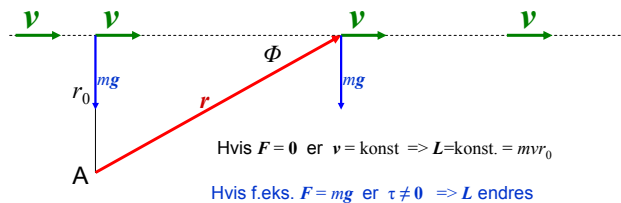
$$\tau = 0 \Rightarrow L = \text{konstant (N1-rot)}$$

stivt legeme:  $\omega = \text{konst}$

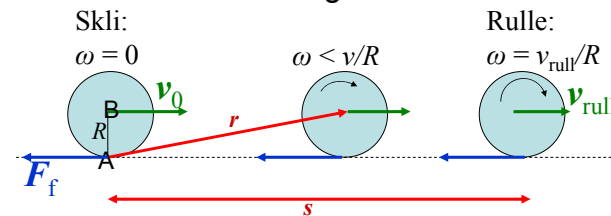
### Spinn ved translasjon

$$L = r \times m v$$

$$|L| = r m v \sin \phi$$



### Bowlingkule



$$L = r \times m v + I\omega$$

Tilsvarende oppgave: [Eksamen des 2007](#)

Om A:  $L_A = \text{konst.} = mrv_0$  fordi  $F_f$  har null moment om A

$$L_{\text{start}} = L_{\text{slutt}} \Rightarrow v_{\text{rull}} = v_0 \cdot 5/7 (*) \text{ -- uten \AA kjenne } F_f !$$

Om B:  $L_B = I\omega$  ikke konstant fordi  $\tau_f = F_f \cdot R$   
 $\Rightarrow I d\omega/dt = F_f \cdot R$

### Oppsummering:

#### Kap. 9+10. Rotasjon av stive legemer

**Vi har sett på:**

- Vinkelhastighet  $\omega = d\theta/dt$ , vinkelakselerasjon  $\alpha = d\omega/dt$
- Sentripetalakselerasjon  $a_c = -r\omega^2 = -v\omega = -v^2/r$
- Baneakselerasjon  $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
- Trehetsmoment  $I = \sum r_i^2 m_i \rightarrow \int r^2 dm$  (om en gitt akse)
- Dreiemoment:  $\tau = r \times F$
- Spinn (dreieimpuls) =  $L = r \times m v$   
For stivt legeme:  $L = I \omega$
- Spinnsatsen:  $\tau = dL/dt$  (Newton 2 for rotasjon)  
For stivt legeme:  $\tau = I d\omega/dt$
- Eksempler: rulling, gyroskop (sykkelhjul), barnekarusell, m.m.

#### Kap. 9+10. Analogier translasjons- og rotasjonsbevegelser

Størrelse	Trans	Rot (vektor)	Rot (skalar)
Stedkoord.	$\vec{r}$		$\theta$
Hastighet	$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$	$\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega}$	$\dot{\theta} = \omega$
Akselerasjon	$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$	$\ddot{\vec{\theta}} = \vec{\alpha}$	$\ddot{\theta} = \alpha$
“Kraft”	$\vec{F}$	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\tau = rF \sin \theta$
“Masse”	$m$		$I = \int r^2 dm$
“Bev.mengde”	$\vec{p} = m \vec{v}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I \vec{\omega}$	$L = r p \sin \theta = I \omega$
Kin. energi	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$		$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
Arbeid	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$	$dW = \tau d\theta$
Effekt	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$	$P = \tau \omega$
Newton 2	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = I \ddot{\vec{\theta}}$	$\tau = I \ddot{\theta}$
Newton 1	$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{konst}$	$\vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{konst}$	

#### Trehetsmoment (om en gitt akse):

$$I = \sum r_i^2 m_i \rightarrow \int r^2 dm$$

- Alle  $I$  om massesentrum (cm):
- Ring om sentrum:  $I = MR^2$
- Ring om diameter:  $I = \frac{1}{2} MR^2$
- Sylinder eller skive om sentrum:  $I = \frac{1}{2} MR^2$
- Kule om diameter:  $I = (2/5) MR^2$
- Kuleskall om diameter:  $I = (2/3) MR^2$   
Rullende legemer:  $I = c m R^2$  ( $c=1, \frac{1}{2}, 2/5$  etc.)
- Lang, tynn stav om midtpunkt:  $I = (1/12) M L^2$
- Rektangulær plate om midtpunkt:  $I = (1/12) M (a^2 + b^2)$
- Om annen parallell akse i avstand  $d$  (Steiners sats):  
 $I = I_{cm} + M d^2$
- Se også Table 9.2 i Young & Freedman.

#### Sentrifugehode



Maks 65000 RPM ( $\omega = 7 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ )

Sentripetalakselerasjon  $\omega^2 r = 380000 \times g$  ved  $r = 8 \text{ cm}$

Banefart ytterst:  $v = \omega r = 550 \text{ m/s}$

Energi  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = 245 \text{ kJ}$   
(med  $I = 2/5 M r^2 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ , kule, 3,9 kg)  
= 1000 W i 245 s (4 min)  
(tilsvarer  $v=360 \text{ m/s} = 1300 \text{ km/t}$  ved translasjon samme kule)

100 g slenges ut med kraft 38 tonn!