Kap. 13. Gravitasjon

- Keplers lover for planetbaner
- Newtons gravitasjonslov
- Gravitasjonens potensielle energi.
- Unnslippshastighet

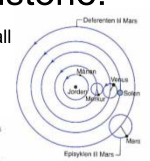
Kap. 13. Gravitasjonen

Naturens fire fundamentale krefter (fra kap 4):

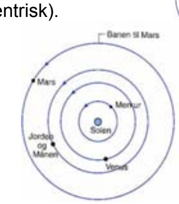
- **Gravitasjonskraft**
  - mellom masser
- **Elektromagnetisk kraft**
  - mellom elektriske ladninger
- Sterk kjernekraft
- Svak kjernekraft

Gravitasjon/solsystemet. Litt historie:

100: Ptolemaios: Jorda i sentrum (geosentrisk). Ulike kuleskall der fiksstjerner og planeter(vandrestjerner) plasseres.



1500: Copernicus: Sola i sentrum (heliosentrisk). Sirkelbaner for alle planeter.



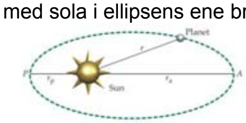
1600: Tycho Brahe → Johannes Kepler: Elliptiske baner for alle planeter. Keplers tre lover.

Så langt bare beskrivelser av observasjoner.
Matematisk beskrivelse og grunnleggende lover:

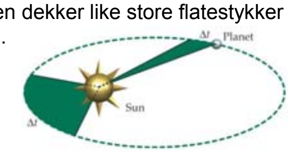
1687: Isaac Newton: Matematisk beskrivelse av Keplers observasjoner i hans kjente verk "**The Principia**: Mathematical Principles of Natural Philosophy". Bl.a. gravitasjonsloven.

1916: Albert Einstein: Den generelle relativitetsteorien. Sorte hull.

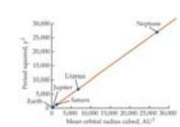
Keplers 1. lov:
Planetbanene er *ellipser* med sola i ellipsens ene brennpunkt.



Keplers 2. lov:
Posisjonsvektoren fra sola til planeten dekker like store flatestykker av ellipsens areal i like store tidsrom.

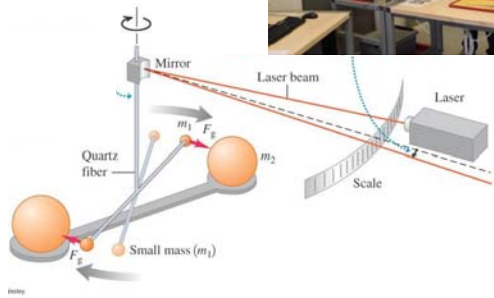


Keplers 3. lov:
For omløpstida T og banens store halvakse a (≈ radius r) gjelder: $T^2 = C \cdot r^3$

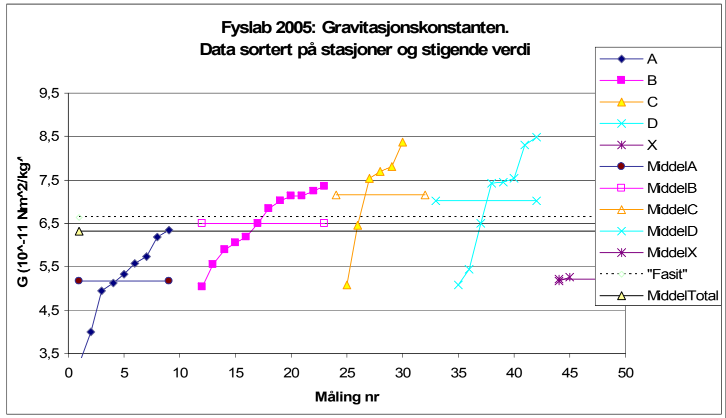


Cavendish-eksperimentet (1798):
Måling av gravitasjonskonstanten G i laboratoriet.

Gir estimat av jordas masse M_2 gjennom tyngdens akselerasjon $g = GM_2/R^2$



Studenters måling av G



Fra Angell & Lian: Fysiske størrelser og enheter, s. 15.
2. utgave 1994

4. utgave 2004

Noen fysiske konstanter

~~2006~~ 2011 ~~2002~~

Verdiene her og ellers i heftet er tatt fra CODATA Bulletin 63 (~~1986~~). Usikkerheten ligger i de to siste sifrene.

lysfarten i tomt rom	c	$\stackrel{\text{def}}{=}$ 299 792 458 m/s
	c^2	= 8,987 551 787 4 · 10^{16} m²/s²
tomromspermeabiliteten, (den magnetiske konstanten)	μ_0	$\stackrel{\text{def}}{=}$ $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m = 1,256 637 061 4 · 10^{-6} H/m
tomromspermittiviteten, (den elektriske konstanten)	ε_0	$\stackrel{\text{def}}{=}$ $1/\mu_0 c^2$ = 8,854 187 ~~817~~ ~~818~~ 817 · 10^{-12} F/m
gravitasjonskonstanten	G, f	= ~~6,672 59~~ ~~6,674 2~~ ~~6,674 28~~ 6,673 84 · 10^{-11} Nm²/kg²
standard tyngdeakselerasjon	g_n	$\stackrel{\text{def}}{=}$ 9,806 65 m/s²
Planck-konstanten	h	= 6,626 ~~075 5~~ ~~069 3~~ ~~068 96~~ 069 57 · 10^{-34} Js = 4,135 669 2 · 10^{-15} eV s
	$\hbar$	$\stackrel{\text{def}}{=}$ $h/2\pi$ = 1,054 572 66 · 10^{-34} Js = 6,582 122 0 · 10^{-16} eV s
elementærladningen	e	= 1,602 ~~177 33~~ ~~176 53~~ ~~176 487~~ 176 565 · 10^{-19} C
elektronradien	r_e	= $\mu_0 e^2/(4\pi m_e)$ = 2,817 940 ~~92~~ ~~325~~ ~~289 4~~ 326 7 · 10^{-15} m

Fysiske konstanter fra CODATA:
http://physics.nist.gov/cuu/Constants
Verdier revidert: 1969, 1973, 1986, 1998, 2002, 2006, 2011

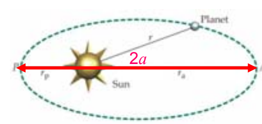
Newtons gravitasjonslov

$F = -\,G\,m\,M\,/\,r^2$ (13.1)

Utledning basert på:
Gravitasjonskraft = Sentripetalkraft

sirkelbane: $G\,mM\,/\,r^2 \;=\; m\omega^2\,r = m\,4\pi^2/T^2\,r$
$\Rightarrow\; T^2 = (4\pi^2/GM)\;r^3$ (≈ Kepler 3)

ellipsebane (Newton viste):
$T^2 = (4\pi^2/GM)\;a^3$ (= Kepler 3)
a = banens store halvakse

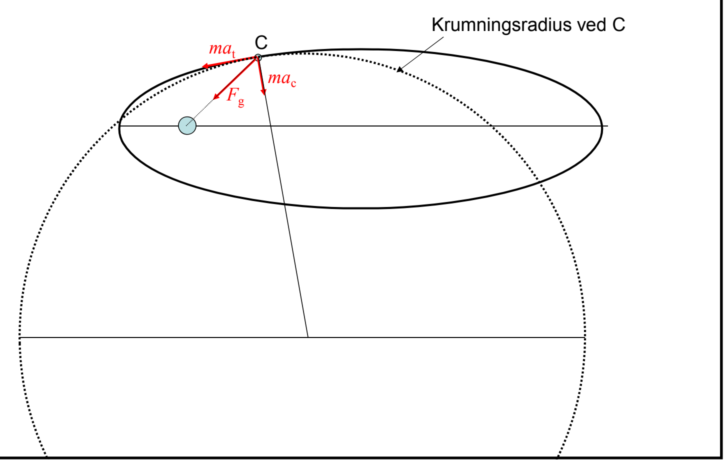


Keplers 3. lov:
For omløpstida T og banens store halvakse a ($\approx$ radius r) gjelder: $T^2 = C \cdot a^3$

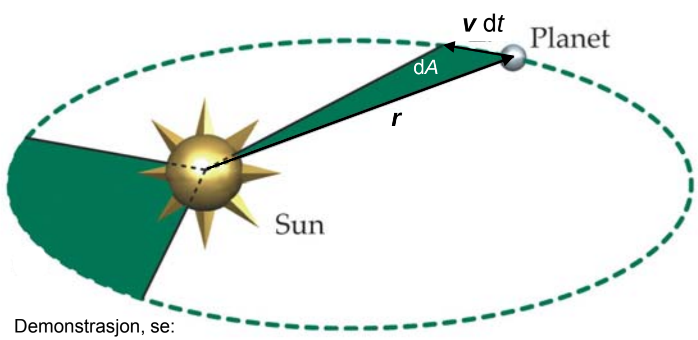
Mean Orbital Radii and Orbital Periods for the Planets

Planet	Mean Radius r ($\times 10^{10}$ m)	Period T (y)	T^2/a^3 (10^{-36} s²/m³)
Mercury	5.79	0.241	299
Venus	10.8	0.615	300
Earth	15.0	1.00	296
Mars	22.8	1.88	298
Jupiter	77.8	11.9	301
Saturn	143	29.5	298
Uranus	287	84	299
Neptune	450	165	299
Pluto	590	248	300

Ellipsebaner: Grav.kraft F_g gir sentripetalaksel a_c og baneaksel. a_t



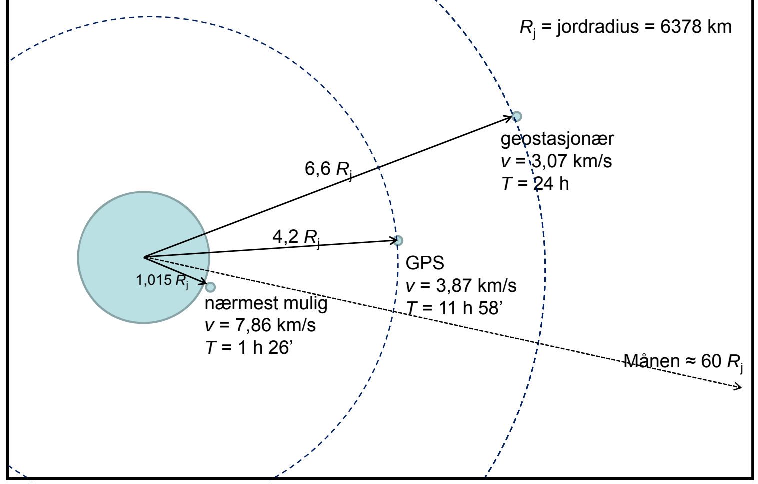
Keplers 2. lov:
Posisjonsvektoren fra sola til planeten dekker like store flatestykker av ellipsens areal i like store tidsrom.



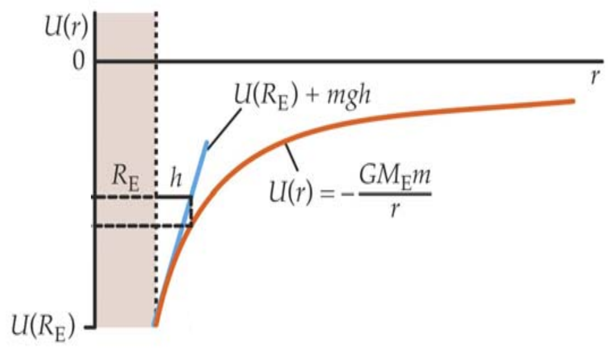
Demonstrasjon, se:
http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/tfy4145/simuleringer.html

⇔ Spinnsatsen: ***L*** = konstant

Sirkulære satelittbaner



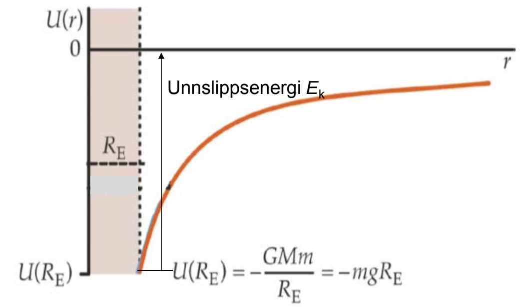
Potensiell energi $U(r) = E_p(r)$



Unnslippshastighet (escape speed)

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E}$$

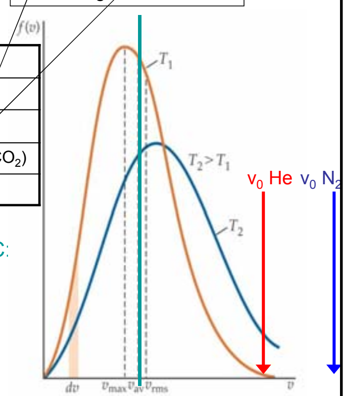
- er uavhengig massen



Tyngdeaksel. og unnslippshastighet:

≈ **Alle** gasser slipper unna månen og mars.

	g (m/s²)	v_0 (km/s)	atmosfære?
Månen	1,62	2,4	ingen
Mars	3,7	5,0	(CO_2)
Jorda	9,8	11,2	N_2 O_2 (H_2O Ar CO_2)
Jupiter	23,1	59,5	H_2 He (CH_4)



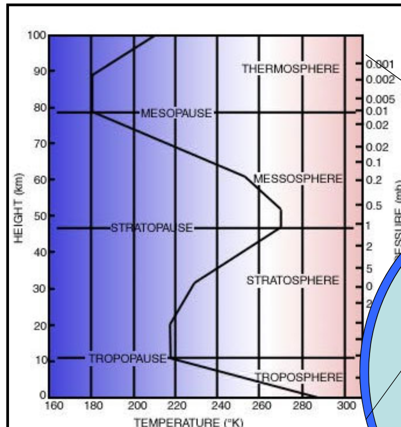
Middelhastighet v_{av} ved $0^{O}C$:

N_2, O_2: v_{av} = 450 m/s
He: v_{av} = 1,3 km/s

Konklusjon:

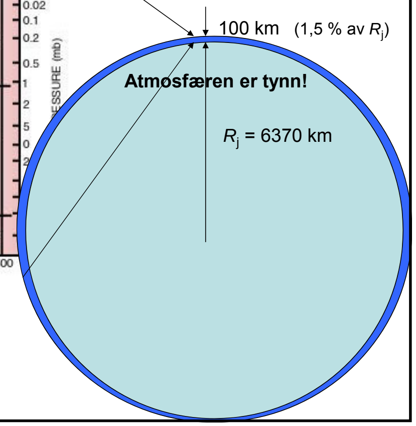
≈ intet N_2 og O_2 har v > 11,2 km/s => slipper ikke unna jorda

En viss andel He har v > 11,2 km/s => He slipper unna jorda



Jordas atmosfære
(fra Wikipedia)

=> Samme unnslippshastighet øverst i atmosfæren som på jordoverflata.



Kap. 13. Gravitasjon

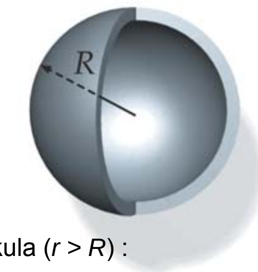
- Keplers 3 lover for planetbaner:
  - **1.** *Ellipser* med sola i ellipsens ene brennpunkt.
  - **2.** Like store flatestykker i lik tid => Spinnsatsen
  - **3. lov:** $T^2 = C\, a^3$ => Newtons grav.lov
    a = store halvakse

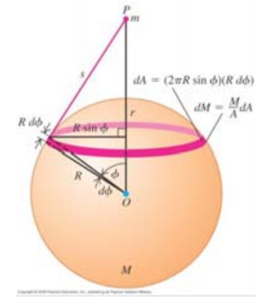
- Newtons gravitasjonslov:
  $F = -\,G\, Mm/r^2$ (punktmasser)
- Utenfor sfæriske legemer: som all masse samla i sentrum

- Gravitasjonens potensielle energi:
  $E_p = -\,G\, Mm/r$ (punktmasser)
- Utenfor sfæriske legemer: som all masse samla i sentrum

Eks. 1. Utenfor og inni tynt kuleskall

Integrert av Newton, og:
Y&F kap 13.6; L&L Eks. 11.2





Utenfor kula ($r > R$) :

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r} \qquad (13.24)$$

$$\Rightarrow F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = -\frac{GMm}{r^2}$$

(som all masse i sentrum)

Inni kula ($r > R$):

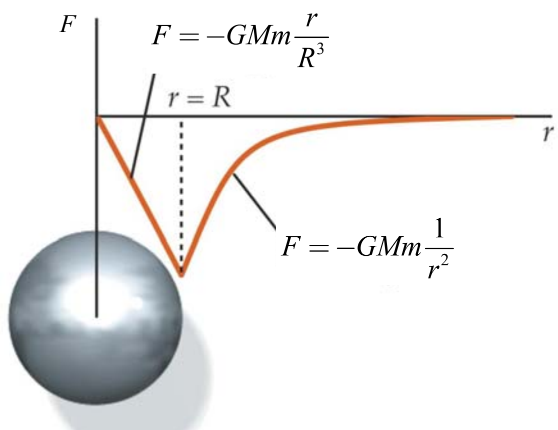
$$E_p(r) = -\frac{GMm}{R} \qquad (13.26)$$

$$\Rightarrow F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = 0$$

(ingen masse i sentrum)

Eks. 2. Inni ($r<R$) massiv kule

Y&F Ex. 13.10; L&L Eks. 11.3



Sammenheng potensiell energi og konservativ kraft

$$E_p = -\int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}r}\hat{r}$$

Utenfor kule:

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}\left(-G\frac{Mm}{r}\right)}{\mathrm{d}r} = -G\frac{Mm}{r^2}$$

Inni massiv kule:

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}\left(-G\frac{Mm}{R}\frac{1}{2}\left[3 - \frac{r^2}{R^2}\right]\right)}{\mathrm{d}r} = -GMm\frac{r}{R^3}$$

Kap. 13. Gravitasjon

- Keplers 3 lover for planetbaner:
  1. *Ellipser* med sola i ellipsens ene brennpunkt.
  2. Like store flatestykker i lik tid => Spinnsatsen
  3. lov: $T^2 = C\,a^3$ => Newtons grav.lov
  a = store halvakse
- Newtons gravitasjonslov:
  $F = - G\, Mm/r^2$ (punktmasser)
- Utenfor sfæriske legemer: som all masse samla i sentrum
- Inni massive sfæriske legemer: $F = - G\, Mm{\cdot}r/R^3$
- Gravitasjonens potensielle energi:
- $E_p = - G\, Mm/r$ (punktmasser)
- Utenfor sfæriske legemer: som all masse samla i sentrum
- Tyngdens akselerasjon:
  $g = F/m = - G\, M/r^2$ ($\approx$ 9,8 m/s² når $r = R_j$)
- Gravitasjonsmasse (i $F = - G\, Mm/r^2$) = treg masse (i $F=ma$)

Gravitasjon og Einsteins generelle relativitetsteori:

1. Avbøyning av lys nær planeter/stjerner.
2. Tida går fortere jo sterkere gravitasjonsfeltet er. Frekvensen på lys endres.

Relativ tidskorreksjon: $$\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta E_p}{mc^2}$$

Eks: Ved svært sterkt grav.felt slipper ikke lys ut: SORTE HULL.

(unnslippshastighet > lysfarten)

Jorda masse med radius 0,88 cm ville gi et sort hull.

Gravitasjon og Einsteins generelle relativitetsteori:

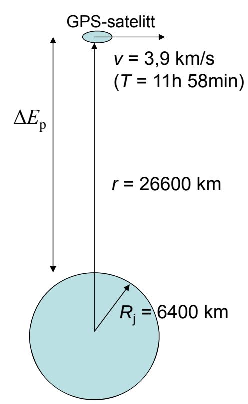
Tidskorreksjoner ved GPS:

1) Den spesielle relativitetsteorien =>
Korreksjon pga. stor hastighet (v/c = 13·10⁻⁶):
Satelittklokker **sakner 7 μs** per døgn

2) Den generelle relativitetsteorien =>
Korreksjon pga. ulik gravitasjon ($\Delta t/t = \Delta E_p/mc^2$):
Satelittklokker fortner **45 μs** per døgn

Totalt: Satelittklokker **fortner 38 μs** per døgn
(38 μs / 86400 s = $4{,}4\cdot10^{-10}$)

Løsning:
GPS-mottakere bruker 10,23000000000 MHz
Sendefrekvensen til satelitten er 10,22999999543 MHz.



Jordrotasjonen og Foucaults pendel

Rotasjonstid for Foucaltpendelen:
Polene: 24 timer
Ekvator: ∞ (ingen rotasjon)
Breddegrad φ : 24 h/sin φ
Breddegrad 63,4°: 26 h 45'