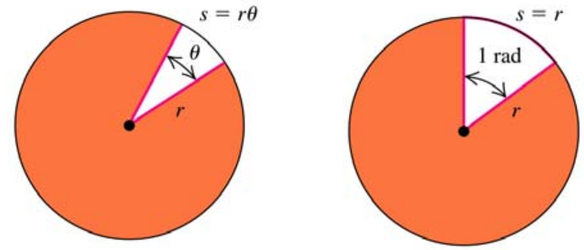
Kap. 9+10
Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- Spinnsatsen (Newton 2 for rotasjon):
  $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

Vinkler måles i radianer:

$\theta = s/r$ dvs. $s = r\theta$



Vinkelhastighet:

$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$

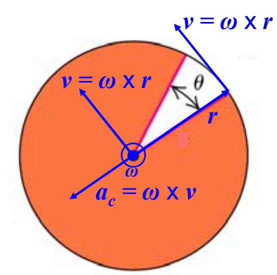
Viktige størrelser (rotasjon)

- Vinkelpos. $\theta = s/r$
- Vinkelhastighet $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = v/r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{\omega}$ langs akseretning
- Periode $T = \text{tid/omdr} = 1/f$
- Frekvens $f = 1/T$
- Vinkelfrekvens = vinkelhastighet = $\omega = 2\pi f$
- Vinkelaksel. $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}^2t$
- Banefart $v = |v| = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \omega r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
- Baneaksel. $a_t = \alpha\, r$
- Sentr.aksel. $a_c = v^2/r = \omega^2 r$
  - Vektorstørrelse: $\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
  - Total aksel = $\vec{a} = -a_c\hat{r} + a_t\hat{\theta}$

Vektorer:

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

$\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$



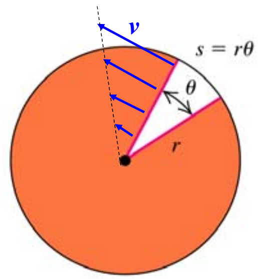
Lik for hele legemet:

Vinkelhastighet $\omega = d\theta/dt$

Vinkelaksel. $\alpha = d\omega/dt$

Øker med radien r :

Banefart $v = ds/dt = \omega r$



Tang.aksel. $a_t = \alpha r$

Sentr.aksel. $a_c = \omega^2 r$

- Translasjon: $E_k = ½ m v^2$

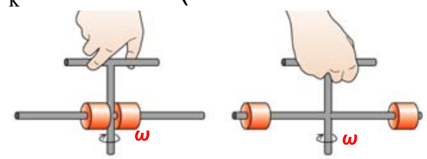
Massens plassering ingen betydning for E_k

Samme v , samme E_k

- Rotasjon: $E_k = ½ I \omega^2$

der $I = \int r^2 \, dm$

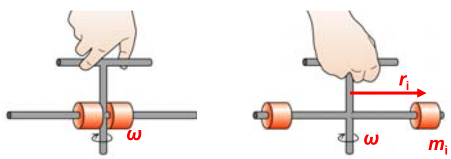
E_k øker med (massens avstand)^2 fra aksen



Samme ω, men ulik E_k

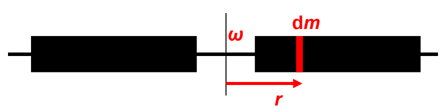
$E_k = ½ I \omega^2$

$I = \Sigma r_i^2 m_i$



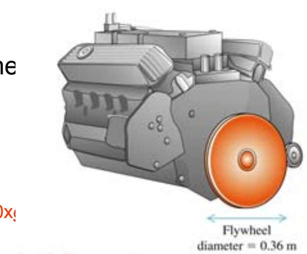
Her må vi integrere:

$I = \int r^2 \, dm$



Rotasjonshjul som energilager

- Stålskive 10 cm tykk, 1,0 m diame
  $I = ½ MR^2 = 77$ kg m^2
  Problem:
  Tung! (600 kg) Deformeres!
  I periferien er:
  Banefart $v = \omega r = 1000$ m/s
  Sentripetalaksel $\omega^2 r = 220000$x



- Energi ved 20000 RPM (omdr. per min):
  $E_k = ½ I \omega^2 = 170$ MJ
- Forbrenningsenergi i bensintank på 40 liter, ved utnyttelse 33%: ca 530 MJ

Brukes i motorkjøretøy:
KERS = Kinetic Energy Recovery System:
en.wikipedia.org/wiki/KERS
Ett eksempel: R=12 cm M=5,0 kg f= 64 500 rpm E = 400 kJ

KERS i sykler:
www.sciencefriday.com/video/08/12/2011/boost-your-bike.html

Med KERS kan trolleybusser i Zürch også kjøre uten strøm:

Kap. 9+10. Rotasjon av stive legemer

Vi har sett på:

- Vinkelhastighet $\omega = d\theta/dt$, vinkelakselerasjon $\alpha = d\omega/dt$
- Banehastighet $v = r\,\omega$
- Sentripetalaks. $a_c = - r\,\omega^2 = - \omega\,v = - v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi $E_k = ½\, I\, \omega^2$
- Treghetsmoment $I = \Sigma\, r_i^2\, m_i = \int r^2\, dm$ (om en gitt akse)
  - Ring om sentrum: $I = M\ R^2$
  - Skive om sentrum: $I = ½\, M\ R^2$
  - Lang, tynn stav om midtpunkt: $I = (1/12)\ M\ L^2$

  (Alle disse gjennom massefellespunktet = cm)

Vektorer: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

- Steiners sats (parallellakseteoremet):
  Treghetsmoment om annen parallell akse i avstand d:
  $I = I_0 + M\ d^2$
  dvs. I_0 (akse gjennom cm) er alltid **minst** mulige treg.moment

http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_axes_rule

Treghetsmoment (om en gitt akse):

$$I = \Sigma\, r_i^2\, m_i \ \rightarrow \int r^2\, dm$$

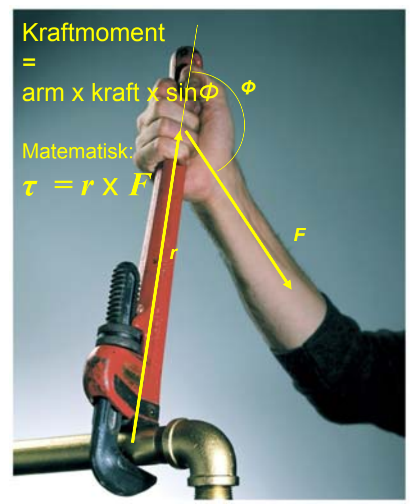
- Alle I_0 om massesentrum (cm):
- Ring om sentrum: $I_0 = M\,R^2$
- Ring om diameter: $I_0 = ½\, M\,R^2$
- Sylinder eller skive om sentrum: $I_0 = ½\, M\,R^2$
- Kule om diameter: $I_0 = (2/5)\, M\,R^2$
- Kuleskall om diameter: $I_0 = (2/3)\, M\,R^2$

  Rullende legemer: $I_0 = c\, MR^2$ (c=1, ½, 2/5 etc.)
- Lang, tynn stav om midtpunkt: $I_0 = (1/12)\, M\,L^2$
- Rektangulær plate om midtpunkt: $I_0 = (1/12)\, M\,(a^2 + b^2)$

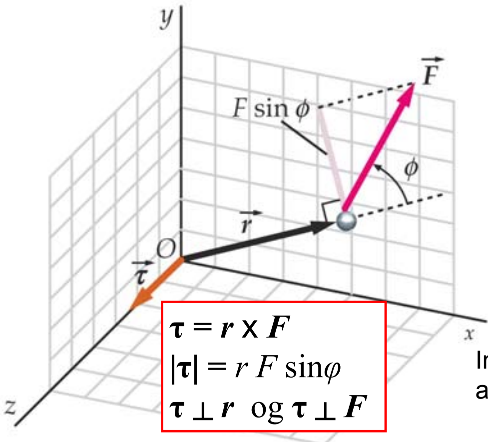
- Om annen parallell akse i avstand d (Steiners sats):

  $I = I_0 + M\,d^2$

- Se også Table 9.2 i Young & Freedman.



Enhver kraft på ethvert legeme
har kraftmoment om en valgt akse.
Altså $\boldsymbol{\tau}$ ikke bare ved rotasjon, men mest nyttig ved rotasjon.



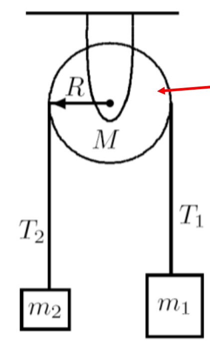
$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

$|\boldsymbol{\tau}| = r\,F \sin\varphi$

$\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{F}$

Ingen vanskelige anvendelser ☺

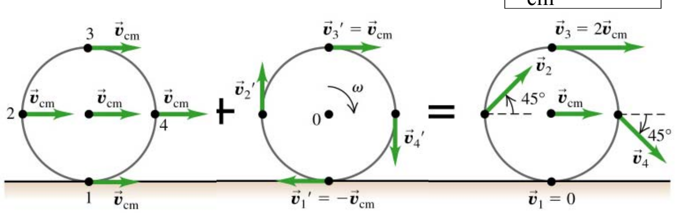
Atwoods (fall)maskin (bl.a. Øving 8)



Trinsa med treghetsmoment *I* skal akselereres i tillegg til akselerasjon av m_2 og m_1

Rulling (uten å glippe) YF 10.3, LL 6.7

Translasjon	+	rotasjon	=	rulling
v		ω		$\boxed{v_{cm} = \omega r}$



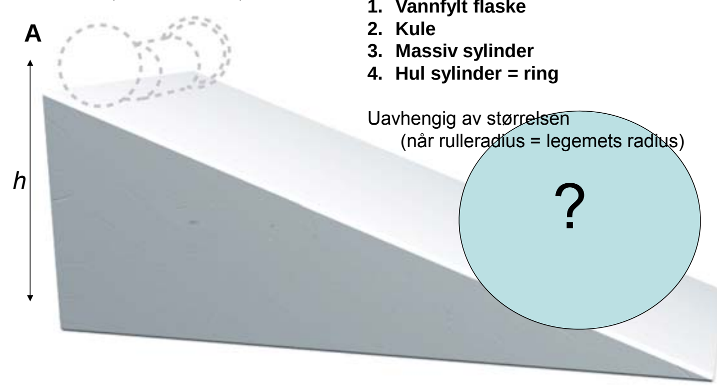
$\tfrac{1}{2}\, m\, v^2 \quad + \quad \tfrac{1}{2}\, I\omega^2 \quad = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2\, (1+c)$

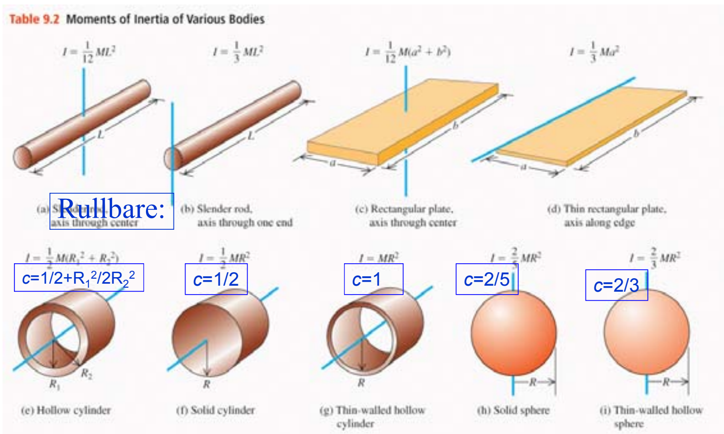
Hvilken ruller fortest:
Massiv kule
massiv sylinder, eller
hul sylinder ?
(Y & F, Ex. 10.5)

$E_k = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2\, (1+c)$ = lik alle
Størst v for den med minst c
i tregh.momentet $I = c\, mr^2$

1. **Vannfylt flaske**
2. **Kule**
3. **Massiv sylinder**
4. **Hul sylinder = ring**

Uavhengig av størrelsen
(når rulleradius = legemets radius)

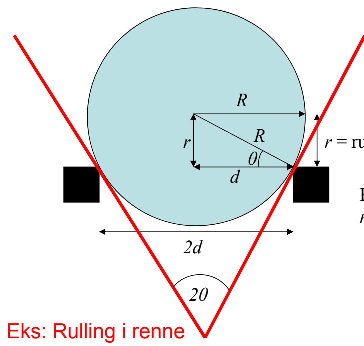




$I = c\, m\, R^2$; $E_k = \frac{1}{2} m\, v^2\, (1+c)$

Mulig med $c>1$?

Rulleradius r < ytre radius R



r = rulleradius $\quad r^2 = R^2 - d^2$

$r = R \sin\theta$

Rulling på flatt underlag: d=0, θ =90°:

$r = R \quad v = \omega r$

$E_{k,rot} = 2/5 \cdot E_{k,trans}$

$d = \sqrt{(3/5)}\, R = 0{,}77\, R \;\; (\theta = 40°)$

$r^2 = 2/5\, R^2 \quad v = \omega r = \sqrt{(2/5)}\, \omega R = 0{,}63\, \omega R$

$E_{k,rot} = E_{k,trans}$

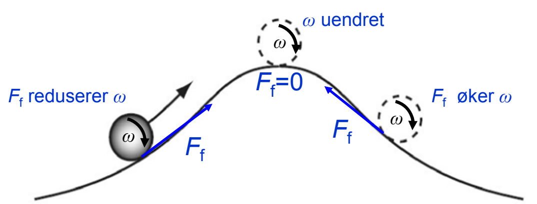
Svært smal renne: $d \rightarrow R$, $\theta \rightarrow 0°$

$r \rightarrow 0 \quad v = |\omega r \rightarrow 0$

$E_{k,rot} >> E_{k,trans}$

Test

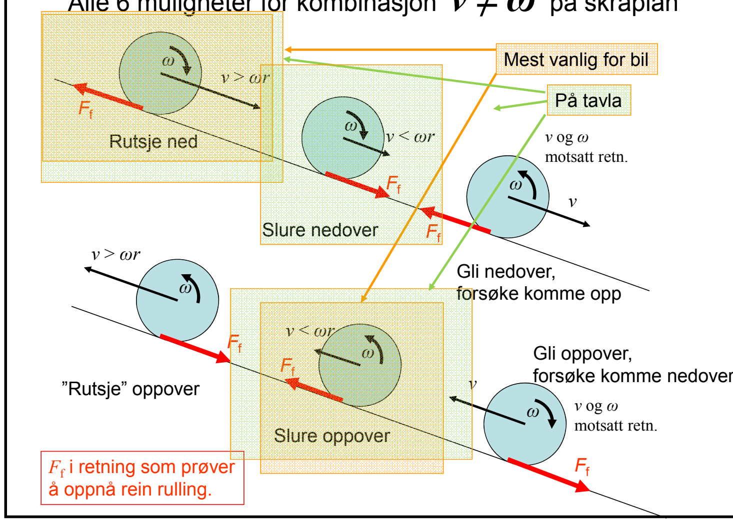
Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.



Ytre kraft (mg sinα) endrer v

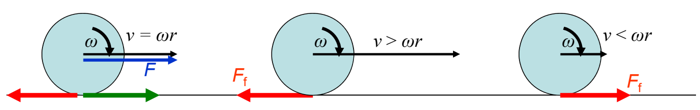
F_f gir moment til rotasjonen

Alle 6 muligheter for kombinasjon $v \neq \omega$ på skråplan



Rulle / skli / slure på flatt underlag

Rulle | Skli | Slure



F_f =0 hvis konst v | F_f reduserer v (og øker ω) | F_f øker v (og redus. ω)

hvis:

v **øker** => F_f mot venstre for å øke ω

v **minker** => F_f mot høyre for å redusere ω

Hvis ytre kraft F årsak til endring i v

ω **øker** => F_f mot høyre for å øke v (akselererer)

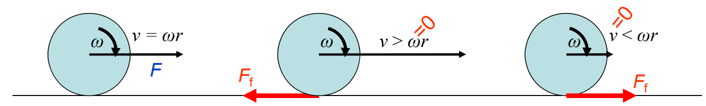
ω **minker** => F_f mot venstre for å minke v (bremser)

Hvis bilmotor/hjulrotasjon årsak til endring i v

(mer avansert)

Rulle / skli / slure på flatt underlag

Rulle | Skli | Slure



F_f =0 hvis konst v | F_f reduserer v (og øker ω) | F_f øker v (og redus. ω)

Finne retning for F_f:

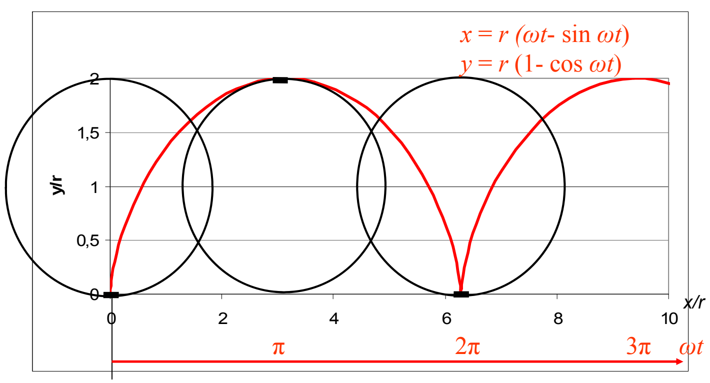
1. Sett minste verdi lik null.

eller

2. F_f i retning som prøver å oppnå rein rulling.

Sykloide

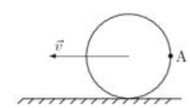
(et punkt på felgen ved rulling)



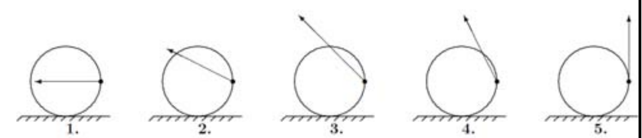
Test

Eksamensoppgave des. 2007, 1d

d. Et hjul med radius R ruller på flatt underlag mot venstre med hastighet v. Hvilken av figurene representerer riktig hastighetsvektor for et punkt A på hjulet?



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

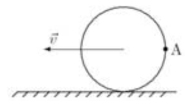


Eksamensstatistikk:
A) 4
B) 9
C) 67
D) 6
E) 83
blank 1
Tot 170

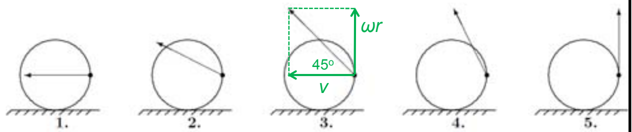
Test

Eksamensoppgave des. 2007, 1d

d. Et hjul med radius R ruller på flatt underlag mot venstre med hastighet v. Hvilken av figurene representerer riktig hastighetsvektor for et punkt A på hjulet?



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

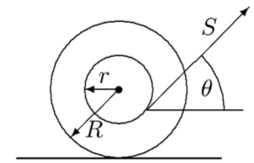


Periferihastighet ωr
= rullehastighet v

Eksamensstatistikk:

A)	4	
B)	9	
C)	67	Riktig
D)	6	
E)	83	
blank	1	
Tot	170	

Snelle med snor
(kort oppsummering)



- Trekkes mot deg ved liten vinkel θ
- Trekkes fra deg ved stor vinkel θ
- I ro ved $\cos\theta = r/R$

- Stive legemer i ro (statisk likevekt):
  - Ingen translasjon => $\Sigma \boldsymbol{F} = 0$
  - Ingen rotasjon => $\Sigma \boldsymbol{\tau} = 0$ $(\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})$
    - » om **enhver valgt** akse

Rotasjon av stive legemer

Vi har sett på:

- Vinkelhastighet $\omega = d\theta/dt$, vinkelakselerasjon $\alpha = d\omega/dt$
- Sentripetalaks. $a_c = -r\,\omega^2 = -\omega v = -v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi $E_k = ½\, I\, \omega^2$
- Treghetsmoment $I = \Sigma r_i^2 m_i = \int r^2\, dm$ (om en gitt akse)
- Steiners sats (parallellakseteoremet):
  Treghetsmoment om annen parallell akse i avstand d:
  $I = I_0 + M d^2$
  dvs. I_0 (akse gjennom cm) er alltid **minst** mulige treg.moment
- Rein rulling: $v = \omega r$. Statisk friksjon $F_f \le \mu_s F_N$ med $r F_f = I\alpha$.
- Skli/rutsje: $v \neq \omega r$. Kinetisk friksjon $F_f = \mu_k F_N$ i retning som prøver å oppnå rein rulling.

Vektorer: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Oppsummering: Rulling

- **Rein rulling:**
- $v = \omega r$; $a = \alpha r$
  (dvs. translasjonshastighet = banefart til periferien)
- $E_k = ½\, mv^2 + ½\, I\omega^2 = ½\, m\, v^2\, (1+c)$
  - med $I = c\, mr^2$ og $\omega = v/r$
- **Statisk** friksjon $F_f \le \mu_s F_N$ vesentlig for rulling
  og gir vinkelakselerasjon α: $F_f\, r = I\alpha$

- **Spinne/skli/rutsje:**
- $v \neq \omega r$. **Kinetisk** friksjon $F_f = \mu_k F_N$ i retning som prøver å oppnå rein rulling.
- Kinetisk friksjon gjør et friksjonsarbeid som endrer kinetisk energi

- Rein rulling: ser vi bort fra energitap (ingen rullemotstand).
- Slure/skli : friksjonsarbeidet er vesentlig.