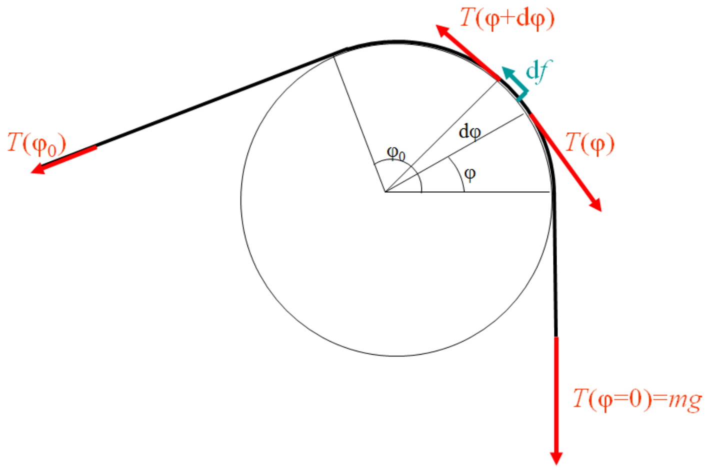
# Notat 1: Friksjon for snor rundt sylinder

Dette notatet tar for seg friksjon mellom snor og underlag når et snor trekkes rundt en sylinder en eller flere ganger. Forelest i kap. 5 men ikke behandla i lærebøkene.

Demonstrasjoner i forelesning viser at påkrevd snordrag for å holde loddet oppe, evt. heise opp loddet, avhenger *sterkt* av $\phi_0$, dvs. vinkel med kontakt mellom snor og sylinder, se figuren.

Oppgaven består i å finne $T(\phi_0)$ for gitt loddtyngde $mg = T(0)$, dvs. strekk i høyre enda av snora. Vi tar for oss tre ulike tilfeller:




Tilfelle A): Loddet slippes ned: $T(\phi_0) < mg$,
Tilfelle B): Loddet holdes såvidt i ro mot å gli nedover: $T(\phi_0) < mg$, nesten lik tilfelle A),
Tilfelle C): Loddet trekkes opp: $T(\phi_0) > mg$

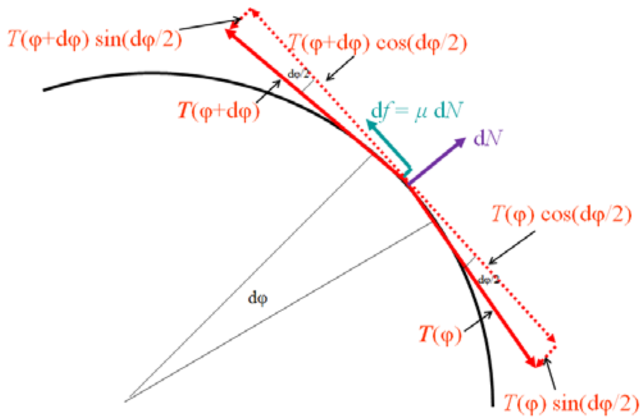
Det er åpenbart at snortrekket $T$ ikke er konstant men avhengig av $\phi$, og vi må tenkte infinitesimalt (differensielt). Tar for oss en snorbit mellom vinkel $\phi$ og $\phi + \mathrm{d}\phi$. Kreftene på denne er, følg med på figuren:

$\vec{T}$ = snordrag fra resten av snora på snorbiten, $T(\phi)$ i nedre ende trekker nedover, $T(\phi + \mathrm{d}\phi)$ i øvre ende trekker oppover,

$\mathrm{d}\vec{N}$ = normalkraft fra sylinder på snorbiten,

$\mathrm{d}\vec{f}$ = friksjonskraft fra sylinder på snorbiten, retning oppover i tilfelle A) og B), nedover i tilfelle C).

Snortrekket $T$ virker langs sylinderen slik at det har en litt ulik vinkel i nedre og øvre ende av snorbiten, vinkel $\mathrm{d}\phi$ mellom disse og vinkel $\mathrm{d}\phi/2$ mellom hver av $T$ og tangenten midt på snorbiten.




Newton 1 på snorbiten gir
$$\vec{T}(\phi + \mathrm{d}\phi) + \vec{T}(\phi) + \mathrm{d}\vec{N} + \mathrm{d}\vec{f} = \vec{0}.$$

Vi dekomponerer tangentielt og normalt (radielt), og definerer positiv friksjonskraft $\mathrm{d}\vec{f}$ oppover, dvs. som tilfelle A) og B).

$$\text{Tangentielt:} \qquad T(\phi + \mathrm{d}\phi)\cos\mathrm{d}\phi/2 + \mathrm{d}f - T(\phi)\cos\mathrm{d}\phi/2 = 0 \tag{1}$$
$$\text{Normalt:} \qquad -T(\phi + \mathrm{d}\phi)\sin\mathrm{d}\phi/2 - T(\phi)\sin\mathrm{d}\phi/2 + \mathrm{d}N = 0 \tag{2}$$

I tilfelle A) og B) med positiv $\mathrm{d}f$ er $T(\phi + \mathrm{d}\phi) < T(\phi)$, i tilfelle C) er $\mathrm{d}f < 0$ og $T(\phi + \mathrm{d}\phi) > T(\phi)$.

Siden vinkelen $\mathrm{d}\phi$ er infinitesimal gjør vi følgende tilnærmelser
$$\sin\mathrm{d}\phi/2 \approx \mathrm{d}\phi/2 \qquad \cos\mathrm{d}\phi/2 \approx 1$$
som innsatt i likningene (1) og (2) gir
$$T(\phi + \mathrm{d}\phi) - T(\phi) + \mathrm{d}f \;=\; 0 \tag{3}$$
$$(T(\phi + \mathrm{d}\phi) + T(\phi))\,\mathrm{d}\phi/2 - \mathrm{d}N \;=\; 0. \tag{4}$$

Selv om snortrekket $T$ kan være stort er det lite endring over infinitesimal lengde, slik at $T(\phi + \mathrm{d}\phi) \approx T(\phi)$, som gir $T(\phi + \mathrm{d}\phi) - T(\phi) = \mathrm{d}T$ (infinitesimal) og $T(\phi + \mathrm{d}\phi) + T(\phi) \approx 2T(\phi)$, innsatt:
$$\mathrm{d}T + \mathrm{d}f = 0 \tag{5}$$
$$T(\phi)\mathrm{d}\phi - \mathrm{d}N = 0. \tag{6}$$

Tilfelle A) (glir nedover): $\mathrm{d}f = \mu_k \mathrm{d}N$,

Tilfelle B) (holdes såvidt i ro mot å gli nedover): $\mathrm{d}f = \mu_s \mathrm{d}N$,
Tilfelle C) (trekkes oppover): $\mathrm{d}f = -\mu_k \mathrm{d}N$.

Bruker i videre regning samlebetegnelsen $\mathrm{d}f = \mu \mathrm{d}N$ og får fra likn. (5) og (6)

$$\mathrm{d}T = -\mu \mathrm{d}N = -\mu T(\phi)\mathrm{d}\phi$$
$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\mu \mathrm{d}\phi,$$

som vi integrerer fra $\phi = 0$ til $\phi$ og får

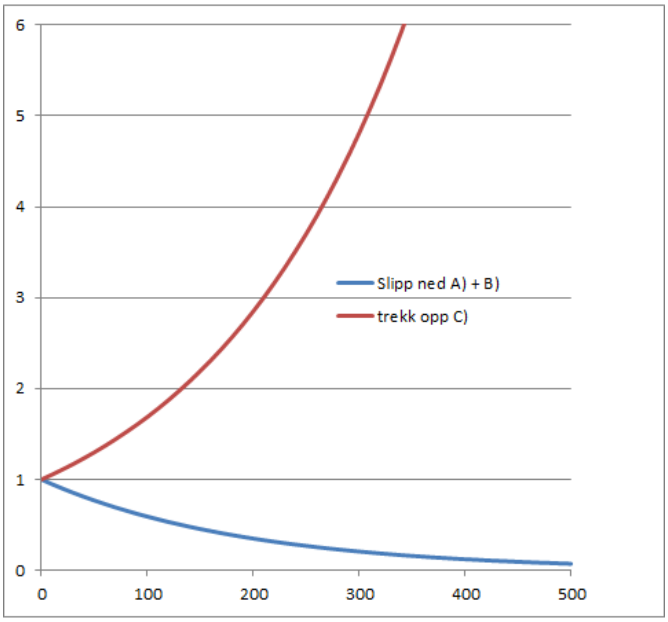
$$\int_0^{T(\phi)} \mathrm{d}T = -\mu \int_0^{\phi} \mathrm{d}\phi$$
$$\ln \frac{T(\phi)}{T(0)} = -\mu\phi$$
$$T(\phi) = T(0) \exp(-\mu\phi). \tag{7}$$

Dette er snortrekket over hele sylinderen for alle $\phi$. Snortrekket på øvre ende ved $\phi_0$ finnes ved å sette inn $\phi = \phi_0$ i likn. (7).

I tilfelle A): $\mu \to \mu_k$ og snortrekket avtar sterkt med økende vinkel $\phi$,
i tilfelle B): $\mu \to \mu_s$ og snortrekket avtar sterkt med $\phi$,
i tilfelle C): $\mu \to -\mu_k$ og snortrekket øker kraftig med $\phi$.

Noen tabellverdier for $T(\phi)/T(0)$. De to kolonnene viser henholdsvis å trekke snora opp, tilfelle A), og å slippe snora ned, tilfelle B) og C), begge med friksjonskoeffisient $\mu = 0,30$. Til høyre tilsvarende graf med $\phi$ i grader langs abscissen.

| $\frac{\phi}{\text{rad}}$ | $\frac{\phi}{\text{grader}}$ | A) og B) $\exp(-\mu\phi)$ | C) $\exp(\mu\phi)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0,785 | 45 | 0,9490 | 1,0538 |
| 1,571 | 90 | 0,9006 | 1,1104 |
| 2,356 | 135 | 0,8546 | 1,1701 |
| 3,142 | 180 | 0,8110 | 1,2330 |
| 6,283 | 360 | 0,7697 | 1,2993 |
| 9,42 | 540 | 0,7304 | 1,3691 |
| 12,57 | 720 | 0,6931 | 1,4427 |





REFERANSER:

`http://www.jrre.org/att_frict.pdf` (god og grundig, mange eksempler)

`http://en.wikipedia.org/wiki/Capstan_equation` (litt mer omstendelig)

J.A. Støvengs forelesning om "Tau over sylinder", 11.sep.2103:
`http://video.adm.ntnu.no/openVideo/pres/505324a2eacc2`


Likning (7) kalles også "Capstan-equation' eller 'Eytelwein's formula" og denne typen friksjon kalles også "belt-friction".

Arne Mikkelsen 15. sep. 2013.