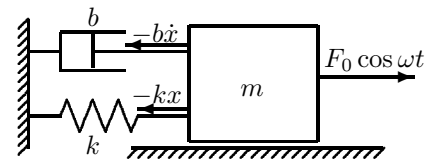


TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk

Notat 3: Tvungen svingning

En tvungen, dempet svingning kan skrives (se krefter i figur):

$$\begin{aligned}
 -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t &= m\ddot{x} \\
 \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= \frac{F_0}{m} \cos \omega t \\
 \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= f_0 \cos \omega t.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$



Likn. (1) er en ikke-homogen, lineær andreordens differensiallikning med konstante koeffisienter og behandles i matematikken. Den generelle løsningen kan uttrykkes

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

der x_h er en løsning av den homogene likningen (høyre side = 0) og x_p er én partikulær løsning. Den homogene likningen er lik den dempede svingelikningen med løsning (for svak demping): $x_h(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi)$. Hvis eksitasjonen $F_0 \cos \omega t$ vedvarer vil etter en viss tid $x_h(t)$ dempes ut. Dermed står $x_p(t)$ igjen å finne. *Følgende utledning er ikke pensum og kan spesielt skippes hvis du ikke har hatt komplekse tall i matematikken. Resultatet og analysene av $A_0(\omega)$ er pensum.*

Vi velger å skrive harmoniske variasjoner (cos eller sin) med kompleks notasjon. Dvs. vi erstatter:

$$\cos(\omega t + \phi) \rightarrow e^{i(\omega t + \phi)} = e^{i\phi} e^{i\omega t}.$$

For pådraget velger vi fasevinkelen $\phi = 0$ slik at

$$f_0 \cos(\omega t) \rightarrow f_0 e^{i\omega t}.$$

Løsningen $x_p(t)$ må følge samme frekvens som pådraget men med en fasevinkel δ , dvs. løsningen må kunne skrives på form (+ δ eller $-\delta$ er en smakssak, vi velger $-\delta$):

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t - \delta) \rightarrow A_0 e^{-i\delta} e^{i\omega t} = A e^{i\omega t}.$$

Her er A_0 (reell) amplitude, fasevinkelen er $-\delta$ og disse skal bestemmes som vi gjør gjennom å bestemme den komplekse amplituden $A = A_0 e^{-i\delta}$. Til dette har vi følgende uttrykk

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A e^{i\omega t} \\
 \dot{x}(t) &= i\omega A e^{i\omega t} \\
 \ddot{x}(t) &= i\omega \cdot i\omega A e^{i\omega t} = -\omega^2 A e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

som vi setter inn i svingelikningen (1) og får

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + 2\gamma i\omega A e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}. \tag{2}$$

Likningen skal gjelde alle t , slik at vi kan forkorte $e^{i\omega t}$. Dette gir følgende likning

$$A \cdot \left(\underbrace{\omega_0^2 - \omega^2}_{=a} + i \underbrace{2\gamma\omega}_{=b} \right) = f_0.$$

Innfører hjelpestørrelsene a og b som vist, og da bestemmes den komplekse størrelsen A :

$$A = \frac{f_0}{a + ib} = \frac{f_0}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{f_0 a}{a^2 + b^2} - i \frac{f_0 b}{a^2 + b^2} = a' - ib'$$

idet $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ og vi har innført $a' = \frac{f_0 a}{a^2 + b^2}$ og $b' = \frac{f_0 b}{a^2 + b^2}$ for i det videre å spare skrivearbeid.

På kompleks polarform (figur til høyre) skrives A :

$$A = A_0 \cdot e^{-i\delta}$$

der

$$\tan \delta = \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

og

$$\underline{A_0} = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{\left(\frac{f_0 a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{f_0 b}{a^2 + b^2}\right)^2} = \frac{f_0}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{f_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}.$$

Den tvungne svingningen har altså forløp

$$\text{kompleks: } x(t) = A e^{i\omega t} = \underline{A_0 e^{-i\delta}} e^{i\omega t} \quad \text{reell: } x(t) = \underline{A_0} \cos(\omega t - \delta)$$

med $A_0(\omega)$ og $\delta(\omega)$ som angitt.

