

Bowlingkule (liknende i Ø12, opg. 1)

Skli: $\omega = 0$
 Rulle: $\omega = v_{\text{rull}}/R$

Om A: $L_A = r \times m v + I_0 \omega$
 Ingen krefter har moment $\Rightarrow L_A = \text{konst.} = mrv_0$
 $L_{\text{start}} = L_{\text{slutt}} \Rightarrow v_{\text{rull}} = v_0 \cdot 5/7$ (*) -- uten å kjenne F_f !

Om B: $L_B = I_0 \omega$
 $\tau_f = F_f \cdot R$
 $\Rightarrow L_B$ ikke konst. men $I_0 d\omega/dt = F_f \cdot R$, må kjenne F_f

Eksamen des 1999

- Oppgave 1 c)

Y&F Opg. 10.83

Kap. 4+5. Rotasjon. Oppsummering.

- Vinkelhastighet $\omega = d\theta/dt$, vinkelakselerasjon $\alpha = d\omega/dt$
- Sentripetalakselerasjon $a_c = -r \omega^2 = -\omega v = -v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
- Tregghetsmoment $I = \sum r_i^2 m_i \rightarrow \int r^2 dm$ (om en gitt akse)
- Dreiemoment: $\tau = r \times F$
- Spinn (dreieimpuls) = $L = r \times m v$ (om en gitt akse)
 For stivt legeme: $L = I \omega$
- Spinnsatsen: $\tau = dL/dt$ (Newton 2 for rotasjon)
 For stivt legeme: $\tau = I d\omega/dt$
- Friksjon er vesentlig for rulling:
 - rein rulling: statisk friksjon $F_f \leq \mu_s F_N$. Friksjonsarbeidet neglisjerbart
 - slure/gli: kinetisk friksjon $F_f = \mu_k F_N$
- Eksempler: rulling, gyroskop (sykkelhjul), barnekarusell, m.m.

Translasjon:	Rotasjon:
<p>Bevegelsesmengde (linear momentum): $p = m v$</p> <p>N2-trans: $F = dp/dt$ "Stivt" legeme (konst. m): $F = m dv/dt = m a$</p> <p>$F = 0 \Rightarrow p = \text{konstant (N1)}$ "stivt" legeme: $v = \text{konst}$</p>	<p>Spinn (angular momentum): $L = r \times m v$ $L = I \omega$ Stivt legeme</p> <p>N2-rot (spinnsetsen): $\tau = dL/dt$ Stivt legeme (konst. I): $\tau = I d\omega/dt = I \alpha$</p> <p>$\tau = 0 \Rightarrow L = \text{konstant (N1-rot)}$ stivt legeme: $\omega = \text{konst}$</p>

Kap. 4+5. Analogier translasjons- og rotasjonsbevegelser

Størrelse	Trans	Rot (vektor)	Rot (skalar)
Stedkoord.	\vec{r}		θ
Hastighet	$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$	$\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega}$	$\dot{\theta} = \omega$
Akselerasjon	$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$	$\ddot{\vec{\theta}} = \vec{\alpha}$	$\ddot{\theta} = \alpha$
"Kraft"	\vec{F}	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\tau = rF \sin \theta$
"Masse"	m		$I = \int r^2 dm$
"Bev.mengde"	$\vec{p} = m \dot{\vec{r}}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I \vec{\omega}$	$L = r p \sin \theta = I \omega$
Kin. energi	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$		$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
Arbeid	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$	$dW = \tau d\theta$
Effekt	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$	$P = \tau \omega$
Newton 2	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = I \ddot{\vec{\theta}}$	$\tau = I \ddot{\theta}$
Newton 1	$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{konst}$	$\vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{konst}$	

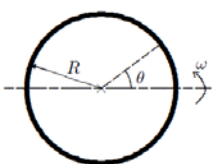
Trehetsmoment ved integrasjon.

Ring om diameter: [Eksamen des. 2006, opg 4a](#)

Oppgave 4. (teller 20%) (a + b+ c)

a. Beregn ved integrasjon trehetsmomentet til en tynn ring ved rotasjon om en diagonal, dvs. akse gjennom ringens sentrum og parallelt med ringens plan. Uttrykk I med ringens radius R og masse m .

OPPGITT: $\int \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta$.

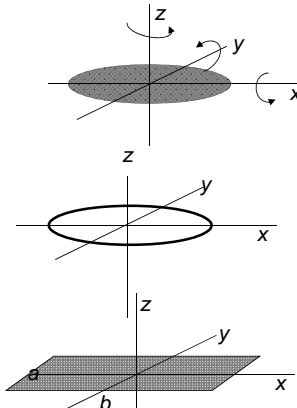


Trehetsmoment ved integrasjon

- Ring om diameter: [Eksamen des. 2006, opg 4a](#) $I = \frac{1}{2} m R^2$
- Sirkulær plate om diameter $I = \frac{1}{4} m R^2$
- Sirkulær plate om sentrum $I = \frac{1}{2} m R^2$

Tregghetsmoment om x, y, z for planlegemer

Normalakse-teoremet:
 $I_z = I_x + I_y$



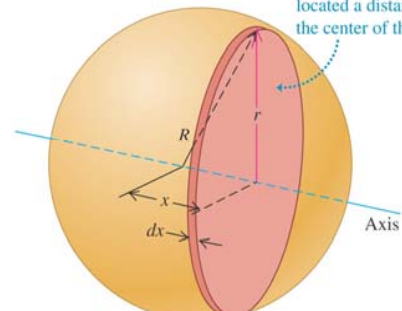
Sirkulær plate:
 $I_x = \frac{1}{4} m R^2$
 $I_y = \frac{1}{4} m R^2$
 $I_z = \frac{1}{2} m R^2 = I_x + I_y$

Tynn ring:
 $I_x = \frac{1}{2} m R^2$
 $I_y = \frac{1}{2} m R^2$
 $I_z = m R^2 = I_x + I_y$

Rektangulær plate:
 $I_x = \frac{1}{12} m a^2$
 $I_y = \frac{1}{12} m b^2$
 $I_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) = I_x + I_y$

Kule: del opp i sirkulære plater om sentrum, hver med $dI = \frac{1}{2} dm r^2$

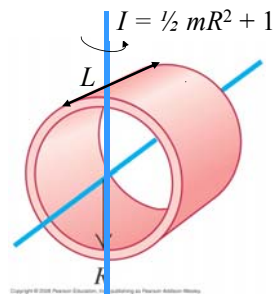
Mass element: disk of radius r and thickness dx located a distance x from the center of the sphere



$I = \frac{2}{5} m R^2$

Figure 9.25

Hul sylinder om tverrakse:



$I = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{12} m L^2$

Om senterakse:
 $I = m R^2$

Tregghetsmoment ved integrasjon

Eksamensoppgaver:

- Ring om diameter: [Eksamen des. 2006, opp 4a](#) $I = \frac{1}{2} m R^2$
- Bjelke om enden: [Eksamen des. 2012, opp 5](#) $M/3(L^2+b^2)$
- Jorda, ujevn massetetthet: [Eksamen des. 2011, opp 3](#) $7\pi/12 \rho_0 R^3$
- Kvadrat om diameter: [Eksamen des. 2010, opp 5](#) $1/6 M b^2$
- 90°-bøyle: [Eksamen des. 2008, opp 4b](#) $I = \frac{1}{2} M R^2 (1 - 2/\pi)$

Kap. 13. Gravitasjon

- Keplers 3 lover for planetbaner:
 - Ellipser med sola i ellipsens ene brennpunkt.
 - Like store flatestykker i lik tid => **Spinnsetsen**
 - lov:** $T^2 = C a^3$ => **Newtons grav.lov**
 $a = \text{store halvakse}$
- Newtons gravitasjonslov:

$$F = -G \frac{Mm}{r^2}$$
 (punktmasser)
- Utenfor sfæriske legemer: som all masse samla i sentrum
- Inni massive sfæriske legemer: $F = -G \frac{Mm \cdot r}{R^3}$
- Gravitasjonens potensielle energi:
 - $E_p = -G \frac{Mm}{r}$ (punktmasser)
 - Utenfor sfæriske legemer: som all masse samla i sentrum
- Tyngdens akselerasjon:

$$g = F/m = -G \frac{M}{r^2}$$
 ($\approx 9,8 \text{ m/s}^2$ når $r = R_E$)
- Gravitasjonsmasse (i $F = -G \frac{Mm}{r^2}$) = treg masse (i $F=ma$)

Sammenheng potensiell energi og konservativ kraft

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{F} = - \frac{dE_p}{dr} \hat{r}$$

Utenfor kule:

$$F(r) = - \frac{dE_p}{dr} = - \frac{d \left(-G \frac{Mm}{r} \right)}{dr} = -G \frac{Mm}{r^2}$$

Inni massiv kule:

$$F(r) = - \frac{dE_p}{dr} = - \frac{d \left(-G \frac{Mm}{R} \frac{1}{2} \left[3 - \frac{r^2}{R^2} \right] \right)}{dr} = -G M m \frac{r}{R^3}$$

Gravitasjon Eksamensoppgaver:

[Eksamen des. 2012, opg 3](#)

[Eksamen des 2011, 1e \(+1f\)](#)

[Eksamen des 2010, 6](#)

[Eksamen des 2008, 4c](#)

[Eksamen des 2007 1h 4c](#)

[Eksamen des 2006 1j](#)

—————> Gjennomgår alle oppgaver:
[Eksamen des 2010](#)

Spørretime før eksamen -- ?

Dato	Eksamen	Ledige Aud
man 9. des 2013		
tir 10. des	TDT4105	
ons 11. des		KI 10:15-12(max) i R2
tør 12. des	(dr-disputas)	
fre 13. des		
lør 14. des	EXPH0004	
man 16. des	TFY4145/FY1001	