TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk

Eksamen 8. des. 2006. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Rett svar:	D	B	A	B	C	C	E	D	E	A

Detaljer om spørsmålene:

a. D. I tyngdefeltet peker akselerasjonen, $\vec{g}$, alltid rett nedover.

b. B. Ei kraft som skyver parallelt med skråplanet endrer ikke på kraftbalansen normalt på skråplanet, den kan bare eventuelt gi akselerasjon langs skråplanet. Derfor er normalkrafta lik tyngens komponent normalt på planet.

c. A. Energibevaring $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2$ gir $v = |\Delta x| \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,05\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{\frac{500}{2,5}\frac{1}{\mathrm{s}}} = 0,71\,\mathrm{m/s}$.

d. B. Fart til venstre kule før støt fra energibevarelse $mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \;\Rightarrow\; v_1^2 = 2gh$. Med v' = fellesfarten etter støtet gir bevaring av bevegelsesmengden: $mv_1 = 2mv'$. Energibevaring etter støtet gir: $2mgH = \frac{1}{2}(2m)\,v'^2$, som gir $H = \frac{1}{2}\frac{v'^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{4g} = \frac{1}{2}\frac{2gh}{4g} = \frac{h}{4}$.

e. C. Støt mellom to roterende skiver. Spinnet (dreieimpulsen), L_{tot}, er bevart i alle støt. Dermed halveres vinkelhastigheten etter støtet. Total kinetisk energi etter blir $W_{\mathrm{etter}} = \frac{1}{2}(2I)\,(\omega/2)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot W_{\mathrm{k,tot,før}}$.

f. C. Da ingen ytre krefter virker er spinnet L konstant. Professoren gjør indre arbeid ved å trekke bøkene nærmere kroppen slik at energien øker. Dette kan også beregnes: Spinnet $L = I\omega$ konstant mens I avtar og ω øker. $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}L\omega$ må da øke.

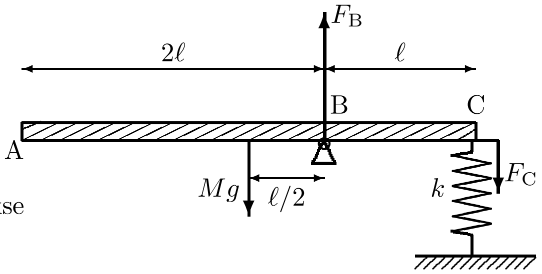
g. E. Det er kun tyngdekrafta som virker på hjulet. Med angrepspunkt i tyngdpunktet et sted på akslingen på positiv x-akse, og retning rett nedover, vil kraftmomentet etter høyrehåndsregelen ha retning langs negativ z-akse. (Kraftmomentet gir en presesjon av systemet, $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t = \tau$, men det var ikke med i spørsmålet.)

h. D. $\dot{x}(t) = \frac{2,0\,\mathrm{m}}{\pi}\cdot 4\pi\mathrm{s}^{-1}\cdot\cos\left(4\pi\mathrm{s}^{-1}\,t + \pi/3\right)$ og ved 2,0 s er denne $8,0\,\mathrm{m/s}\cdot\cos(8\pi+\pi/3) = 8,0\,\mathrm{m/s}\cdot\frac{1}{2}$.

i. E. For harmonisk oscillator er kraft proporsjonal med utsving fra likevekt. Da er også akselerasjonen $a = F/m$ prop. med avstand fra likevekt. Ved D er derfor absoluttverdien av akselerasjonen det dobbelte av ved C.

j. A. $$g \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{m}F_G = \frac{1}{m}G\frac{mM}{R^2} = G\frac{\frac{1}{2}M_{\mathrm{j}}}{(\frac{1}{2}R_{\mathrm{j}})^2} = 2\cdot G\frac{M_{\mathrm{j}}}{R_{\mathrm{j}}^2} = 2\cdot g_{\mathrm{jord}}\,.$$

Oppgave 2.



a. Tyngdekraft: Mg virker i tyngdepunkt midt på bjelken.
Kraft F_{B} fra aksen virker vertikalt oppover.
Kraft F_{C} fra fjæra virker vertikalt nedover.

Betingelse for statisk likevekt:
$\sum\vec{F} = \vec{0}$, her: $\sum F_y = 0$, og $\quad\sum\tau = 0$ om enhver valgt akse

Kreftenes størrelser: Tyngdekraft: $\underline{G = Mg}$.
F_{C} bestemmes ved kraftmomentbalanse om B, der momentet til tyngden Mg oppveies av momentet til F_{C}. Vinkel mellom kraft og arm er for begge 90°, og vi får:

$$F_{\mathrm{C}}\cdot\ell\cdot\sin 90^\circ = Mg\cdot(3\ell/2-\ell)\cdot\sin 90^\circ \quad\Rightarrow\quad \underline{F_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}Mg} \quad \left(\frac{3}{2}mg \;\text{ godkjennes også}\right).$$

F_{B} bestemmes ved $\sum F_y = 0$, som gir $F_{\mathrm{B}} = Mg + F_{\mathrm{C}} = \underline{\frac{3}{2}Mg} \quad \left(\frac{9}{2}mg \;\text{ godkjennes også}\right)$.

b. Avstand fra bjelkens massesenter til akslingen er $\frac{1}{2}\ell$. Bruker oppgitt I_{cm} for lang, tynn stav samt Steiners sats:

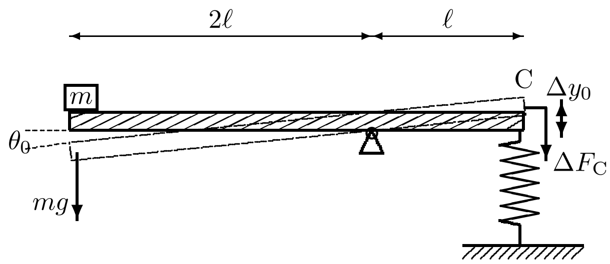
$$I = I_{\mathrm{cm}} + M\cdot\left(\frac{1}{2}\ell\right)^2 = \frac{1}{12}M(3\ell)^2 + M\cdot\left(\frac{1}{2}\ell\right)^2 = \frac{4}{4}M\ell^2 = \frac{1}{9}ML^2 = \underline{3m\ell^2} = 3\cdot 4,0\,\mathrm{kg}\cdot 1,00\,\mathrm{m}^2 = \underline{12\,\mathrm{kg\,m}^2}\,.$$

c. Treghetsmoment for en punktmasse er mr^2, slik at treghetsmoment om B for bjelke pluss massen m blir

$$I' = 3m\ell^2 + m(2\ell)^2 = \underline{7\,m\ell^2}\,.$$

Spinnet for partikkelen om aksen B er før støtet $L_m = mv2\ell$ og spinnet for bjelke + partikkel etter støtet er $L' = I'\dot\theta$. Spinnbevaring gir

$$mv2\ell = 7\,m\ell^2\dot\theta \quad\Rightarrow\quad \underline{\dot\theta = \frac{2v}{7\ell}}\,.$$



d. Statisk likevekt krever at det må bli ei tilleggskraft fra fjæra $\Delta F_{\mathrm{C}} = k\Delta y_0$ nedover på bjelken, som oppveier momentet fra massen m. Vekta av bjelken var nulla ut med opprinnelig fjærkraft, så Mg skal ikke inn i balansen. Heller ikke krafta i B (som selvsagt blir større). Vinkel mellom armen og kraften er $90° \pm \theta_0$ for henholdsvis ΔF_{C} og mg, og vi får:

$$\begin{aligned} mg2\ell\sin(90° - \theta_0) &= \Delta F_{\mathrm{C}}\ell\sin(90° + \theta_0) \\ 2mg &= k\Delta y_0 \end{aligned}$$

Nå er $\Delta y_0 = \sin\theta_0 \cdot \ell \approx \theta_0\ell$ for små vinkler θ_0, som gir

$$\underline{\theta_0 \approx \frac{2mg}{k\ell}} = \frac{2\cdot 4,0\,\mathrm{kg}\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}}{900\,\mathrm{N/m}\cdot 1,00\,\mathrm{m}} = 0,087\,\mathrm{rad} = \underline{5,0°}\,.$$

e. Med ytterligere utslag θ (mot klokka og regnet fra likevektsstillingen θ_0) vil fjæra strekkes ytterligere $y = \ell\sin\theta \approx \ell\theta$. Fjærkrafta i forhold til likevektsstillingen θ_0 vil være $F_{\mathrm{C}} = -ky$ (nedover) og er den eneste som har kraftmoment. Med små vinkler settes $\cos\theta = 1$ (dvs. vinkel mellom arm og kraft $\approx 90°$), slik at kraftmomentet til F_{C} er $\tau = -k\ell\theta\cdot\ell$. Spinnlikninga

$$\tau = I'\ddot\theta \quad\Rightarrow\quad -k\ell\theta\cdot\ell = I'\ddot\theta \quad\Leftrightarrow\quad \ddot\theta + \frac{k\ell^2}{I'}\theta = 0\,, \quad\Leftrightarrow\quad \ddot\theta + \omega^2\theta = 0\,,$$

der vi gjenkjenner svingelikningen med svingefrekvensen

$$\omega = \sqrt{\frac{k\ell^2}{I'}} = \sqrt{\frac{k\ell^2}{7\,m\ell^2}} = \underline{\sqrt{\frac{k}{7\,m}}}\,. \qquad \left(\text{Tallverdi: } \omega = \sqrt{\tfrac{900\,\mathrm{N/m}}{7\cdot 4,0\,\mathrm{kg}}} = 5,67\,\mathrm{s^{-1}}\ ,\ f = 0,90\,\mathrm{Hz.}\right)$$

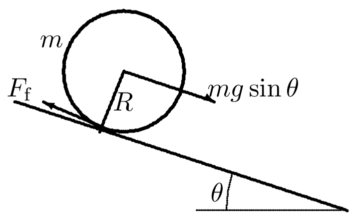
Oppgave 3.

a. Friksjonskrafta er maksimalt $F_{\mathrm{f}} = \mu F_N$, der $F_N = mg\cos\theta$ er normalkrafta fra underlaget og motsatt lik tyngdens komponent normalt på underlaget (ingen bevegelse). Akselererende kraft er (positiv nedover): $\sum F = mg\sin\theta - F_{\mathrm{f}} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$, og skal denne være null må

$$mg\sin\theta \le \mu mg\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \underline{\mu \ge \tan\theta}\,.$$

b. Tyngdens angrepspunkt (i massesenter = sentrum av kuben) må ligge innenfor nedre hjørne av kubens kontaktpunkt (B) med skråplanet (en figur vil gjøre seg). Dette skjer når $\underline{\theta \le 45°}$.
Detaljert regning skulle være unødvendig, men man må i så fall ta utgangspunkt i momentbalanse om B: $\sum\tau = 0$, der F_{N} og mg har moment. Man må merke seg at F_{N}'s angrepspunkt flytter seg nærmere og nærmere B ved økt vinkel og ved $\theta = 45°$ er den akkurat på hjørnepunktet B. For $\theta > 45°$ vil mg ha moment som gir tipping.

c. Grensa til gliing er kjennetegnet ved at friksjonskrafta er sitt maksimale: $F_{\mathrm{f}} = \mu F_{\mathrm{N}} = \mu mg\cos\theta$. Vi regner på grensetilfellet og bruker derfor denne F_{f} i regningen. Vi må finne uttrykk for translasjonsakselerasjon a og rotasjonsakselerasjon α for å sette inn i rullebetingelsen $a = R\alpha$ (fra $v = R\omega$).



Newtons lov for translasjon gir akselerasjon a (positiv nedover skråplanet):

$$ma = mg\sin\theta - F_{\mathrm{f}} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta \quad\Rightarrow\quad a = g\cos\theta\,(\tan\theta - \mu)$$

Newtons lov for rotasjon gir vinkelakselerasjon α (positiv for rulling nedover skråplanet):

$$I\,\alpha = F_{\mathrm{f}}R \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{F_{\mathrm{f}}R}{I} = \frac{\mu mg\cos\theta\,R}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{\mu g\cos\theta}{R}\,,$$

der vi har brukt treghetsmoment for kule.

Disse uttrykk for a og α innsatt i rullebetingelsen $a = R\,\alpha$, gir

$$g\cos\theta\,(\tan\theta - \mu) \quad = \quad \frac{5}{2}\cdot\mu g\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \left(1+\frac{5}{2}\right)\mu \quad \text{eller:} \quad \underline{\mu = \frac{2}{7}\tan\theta}\,.$$

Ved μ mindre enn denne verdien vil kula skli, ved større verdi vil den rulle.

<u>d.</u> Newton 2 for translasjonsbevegelsen med positiv nedover:

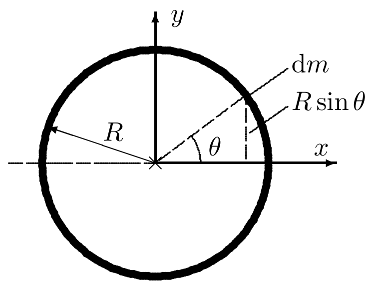
$$\begin{aligned} ma &= (mg)_{\parallel} - F_{\mathrm{f}} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta \\ a &= g\sin\theta - \mu g\cos\theta = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) g = \frac{3\sqrt{2}}{8} g \end{aligned}$$

Newton 2 for rotasjonsbevegelsen med positiv med klokka: $I\alpha = F_{\mathrm{f}}\cdot R$, gir:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}mR^2\cdot\alpha &= \mu mg\cos\theta\cdot R \\ \alpha &= \frac{5}{2}\,\frac{\mu g\cos\theta}{R} = \frac{5}{2}\,\frac{\frac{1}{4}\cdot g\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{R} = \frac{5\sqrt{2}}{16}\,\frac{g}{R} \\ \Rightarrow \quad \frac{a}{\alpha} &= \frac{3\sqrt{2}g}{8}\cdot\frac{16\,R}{5\sqrt{2}\,g} = \underline{\frac{6}{5}R}\,. \end{aligned}$$

<u>Oppgave 4.</u>

<u>a.</u> Legger koordinatsystem (x,y) med origo i ringens sentrum og rotasjonsaksen langs x-aksen. Deler ringen opp i korte segment med lengde $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$ og masse $\mathrm{d}m = m\,\dfrac{\mathrm{d}s}{2\pi R} = m\,\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$. Armen til elementet om rotasjonsaksen er $r = R\sin\theta$. Da blir treghetsmomentet:



$$I = \int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}m = \int_0^{2\pi} R^2\sin^2\theta\cdot m\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \frac{R^2 m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

Integralet av $\sin^2\theta$ er oppgitt.

$$I = \frac{R^2 m}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{R^2 m}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cdot 2\pi - 0 - 0 + 0\right] = \underline{\frac{1}{2}mR^2}\,.$$

<u>b.</u> iii) Første opplysning bestemmer friksjonskoeffisienten: $F_{\mathrm{f,max}} = \mu_{\mathrm{s}} m_1 g = 12,0\,N$ gir

$$\mu_{\mathrm{s}} = \frac{12,0\,\mathrm{N}}{4,40\,\mathrm{kg}\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}} = \underline{0,278}\,.$$

ii) Skal øverste kloss følge med nederste, må de ha samme akselerasjon, a. Øverste kloss får sin akselererende kraft fra F_{f} som er maks. 12,0 N. Newton 2 for øverste kloss gir

$$m_1 a_{\max} = 12,0\,\mathrm{N} \quad , \text{som gir} \quad a_{\max} = \frac{12,0\,\mathrm{N}}{4,40\,\mathrm{kg}} = 2,727\,\mathrm{m/s^2} = \underline{2,73\,\mathrm{m/s^2}}\,.$$

i) Krafta F akselererer begge klossene slik at Newton 2 for (øverste + nederste) kloss som ett system gir:

$$F_{\max} = (m_1+m_2)a_{\max} = (9,90\,\mathrm{kg})\cdot 2,727\,\mathrm{m/s^2} = \underline{27,0\,\mathrm{N}}\,.$$

<u>c.</u> For stabil sirkulær bane er gravitasjonskraft lik sentripetalkraft:

$$F_G = m\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad G\frac{mM}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{GM}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

Med konstant G og konstant jordmasse M gir dette $r^3 \propto T^2$ (som er Keplers 3. lov), altså:

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{2/3} = \left(\frac{24}{12}\right)^{2/3} = \underline{4^{1/3}} = \underline{1,59}\,.$$

A Mikkelsen 2. jan. 2007