NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

LØSNINGSFORSLAG (5 sider):

EKSAMEN I TFY4145 OG FY1001 MEKANISK FYSIKK

Fredag 18. desember 2009 kl. 0900 - 1300

Oppgave 1. Tolv flervalgsspørsmål (teller 30 %)

a. D. Ingen horisontale krefter på kula, så $a_x = 0$, $v_x = c$ og $x = ct + d$, dvs ei rett linje (med $c \neq 0$), dvs graf 4.

b. A. Energibevarelse gir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 + mga &= \frac{1}{2}mv_2^2 + mgb \\ \Rightarrow v_2 &= \left[v_1^2 + 2g\,(a-b)\right]^{1/2} \end{aligned}$$

c. C. Pianoet står i ro, så total kraft på det er null. Horisontalt påvirkes pianoet av deg, dvs skyvkraften på 700 N, og en motsatt rettet og like stor friksjonskraft fra teppet.

d. E. Total kraft på vogna i toppen av loopen er $F = N + G$, der både normalkraften N fra skinnene og tyngdekraften $G = mg$ peker nedover, dvs radielt inn mot loopens sentrum. For sirkelbevegelse vet vi at radiell akselerasjon er V^2/R, der V er vognas fart og $R = d/2$ er sirkelradien. Vi finner V ved hjelp av energibevarelse:

$$\begin{aligned} mgh &= mgd + \frac{1}{2}mV^2 \\ \Rightarrow V^2 &= 2g(h-d) \end{aligned}$$

Dermed er normalkraften

$$N = F - G = mV^2/R - mg = 4mg(h-d)/d - mg \cdot d/d = mg(4h-5d)/d.$$

e. B. Bevaring av bevegelsesmengde gir forholdet mellom hastighetene til de to massene, og dermed forholdet mellom deres kinetiske energi:

$$\begin{aligned} 0 &= p_1 + p_3 = mv_1 + 3mv_3 \\ \Rightarrow \frac{v_1}{v_3} &= -3 \\ \Rightarrow \frac{mv_1^2/2}{3mv_3^2/2} &= 3 \end{aligned}$$

Følgelig 75% kinetisk energi på m og 25% på $3m$.

f. A. Studentens landing på karusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi E for systemet (student + karusell) kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde p være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp en akse gjennom karusellens sentrum, slik at $\Delta L = 0$, og spinnet L er bevart.

g. B. Ethvert rimelig overslag over DVD-platas masse M og radius R vil gi et overslag over dens treghetsmoment I mye nærmere $3 \cdot 10^{-5}$ kgm^2 enn noen av de øvrige alternativene. I virkeligheten er $R \simeq 6$ cm og $M \simeq 15$ g, slik at

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \simeq \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 36 \cdot 10^{-7} \simeq 2.7 \cdot 10^{-5}.$$

(Rimelige overslag, $3 < M < 30$ g og $4 < R < 8$ cm, gir $2 \cdot 10^{-6} < I < 10^{-4}$ kgm^2.)

h. C. Ethvert rimelig overslag over fotballens masse M og radius R vil gi et overslag over dens treghetsmoment I mye nærmere $3 \cdot 10^{-3}$ kgm^2 enn noen av de øvrige alternativene. I virkeligheten er $R \simeq 11$ cm og $M \simeq 430$ g, slik at

$$I = \frac{2}{3}MR^2 \simeq \frac{2}{3} \cdot 430 \cdot 121 \cdot 10^{-7} \simeq 3.4 \cdot 10^{-3}.$$

(Rimelige overslag, $100 < M < 1000$ g og $8 < R < 20$ cm, gir $4 \cdot 10^{-4} < I < 3 \cdot 10^{-2}$ kgm^2.)

i. D. Tangenten til grafen til $x(t)$ i $t = 1$ skjærer den vertikale aksen omtrent i $x = 4$ og passerer $t = 3$ omtrent i (eller litt i overkant av) $x = 13$. Farten i $t = 1$ er dermed

$$v(1) \simeq \frac{9 \cdot 3.6}{3}\,\text{km/h} = 10.8\,\text{km/h} \simeq 11\,\text{km/h}.$$

j. B. Tyngdens akselerasjon på overflata av ei kule er proporsjonal med kulas masse og omvendt proporsjonal med kvadratet av kulas radius (eventuelt diameter). Dermed blir tyngdens akselerasjon på overflata av Uranus

$$g_\text{U} = \frac{14.5}{4^2}\,g \simeq 0.9g.$$

k. A. Vaskemaskina vibrerer vertikalt med frekvens $f = 1200/60 = 20$ Hz og amplitude $A = 0.001$ m. Bevegelsen kan beskrives som en harmonisk svingning

$$y(t) = A\cos\omega t,$$

med vinkelfrekvens $\omega = 2\pi f = 40\pi$ s^{-1}. Akselerasjonen blir

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 A\cos\omega t,$$

slik at dens maksimale akselerasjon nedover, som inntreffer ved maksimalt utsving y oppover,

$$\omega^2 A = 1600\pi^2 \cdot 0.001 \simeq 15.8\,\text{m/s}^2,$$

er større enn $g \simeq 9.8$ m/s^2. Vaskemaskina vil ”stikke av” fra vaskemiddelpakken, som derfor mister kontakten med underlaget.

l. A. Med x_0 som maksimalt utsving kan vi skrive $x(t) = x_0\cos\omega t$, og maksimal akselerasjon blir $a_0 = \omega^2 x_0$. Maksimal hastighet blir dermed

$$v_0 = \omega x_0 = \sqrt{\omega^2 x_0^2} = \sqrt{\omega^2 x_0 \cdot x_0} = \sqrt{a_0 \cdot x_0} = \sqrt{45 \cdot 5}\,\text{cm/s} = 15\,\text{cm/s}.$$

Oppgave 1, svartabell:

Spørsmål:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Mitt svar:	D	A	C	E	B	A	B	C	D	B	A	A

Oppgave 2. Sprettballer (teller 20 %)

a. Energibevarelse gir $mgh = mv_0^2/2$ og $v_0 = \sqrt{2gh}$. Ballen "reflekteres" fra bakken med hastighet $-v_0 = -\sqrt{2gh}$. (Positiv retning valgt nedover.) Ballen endrer sin bevegelsesmengde med $\Delta p = \alpha m \Delta v = -2\alpha m v_0$ i den elastiske kollisjonen med bakken. Bevaring av bevegelsesmengde er ivaretatt i og med at bakken endrer sin bevegelsesmengde med $2\alpha m v_0$.

b. Rett før den elastiske kollisjonen mellom de to ballene har nederste ball hastighet $-v_0$ og øverste ball hastighet v_0. (De har falt like langt.) Det er gitt i oppgaven at v angir hastigheten til øverste ball *oppover* etter kollisjonen. La oss dessuten velge v_1 lik nederste balls hastighet *nedover* etter kollisjonen. Bevaring av energi og bevegelsesmengde gir da

$$mv_0 - \alpha m v_0 = -mv + \alpha m v_1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\alpha m v_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\alpha m v_1^2 \tag{2}$$

Vi dividerer (1) med m og (2) med $m/2$. Deretter samler vi ledd som inneholder α på den ene siden av likhetstegnet:

$$v_0 + v = \alpha(v_1 + v_0) \tag{3}$$

$$v_0^2 - v^2 = \alpha(v_1^2 - v_0^2) \tag{4}$$

Under forutsetning av at begge sider i (3) er forskjellig fra null, kan vi dividere (4) med (3). Det gir

$$v_0 - v = v_1 - v_0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_0 - v,$$

som innsatt i ligning (3) lar oss eliminere v_1:

$$v_0 + v = \alpha(2v_0 - v) + \alpha v_0 = 3\alpha v_0 - \alpha v \tag{5}$$

$$\Rightarrow (\alpha + 1)v = (3\alpha - 1)v_0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow v = \frac{3\alpha - 1}{\alpha + 1} v_0 = \sqrt{2gh} \cdot \frac{3\alpha - 1}{\alpha + 1} \tag{7}$$

$$(\Rightarrow v_1 = 2v_0 - v = -v_0 \frac{\alpha - 3}{\alpha + 1} = -\sqrt{2gh} \cdot \frac{\alpha - 3}{\alpha + 1}\ ) \tag{8}$$

Med "starthastighet" v i $y = 0$ vil den øverste ballen sprette til en høyde $y = v^2/2g$, dvs

$$y = h \cdot \left(\frac{3\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)^2.$$

Grense- og spesialtilfeller (som her er mer utførlig diskutert enn det som var forventet til eksamen):

- $\alpha \gg 1$: Da vil $v \to 3v_0$ og $y \to 9h$. Høyere enn dette er det altså ikke mulig å få en ball til å sprette ved å slippe den sammen med *en* tyngre ball, fra høyden h. Med *flere* baller, derimot, med gradvis økende masse nedover, er det mulig å få den øverste ballen til å sprette riktig høyt (se A. Anderson og J. Vanderkooy, *Physics Education* **34**, side 172 (1999)). (Merk: Med *uendelig stor* α blir $v_1 = -v_0$ og høyre side av (3) lik null, slik at vi ikke uten videre kan dividere (4) med (3). Men baller med uendelig stor masse bekymrer ikke en fysiker – slike fins jo uansett ikke.)
- $\alpha \ll 1$: Da vil $v \to -v_0$, dvs den nå mye tyngre øverste ballen vil tvinge den nederste ballen til "retrett", og selv ganske enkelt fortsette sin ferd nedover med praktisk talt uendret hastighet. Men bakken er jo der, i umiddelbar nærhet, så enden på visa blir at den øverste ballen "reflekteres" med farten v_0 og spretter til starthøyden $y = h$. Dette ligger da også allerede "innbakt" i uttrykket for $y(h, \alpha)$, dvs $y \to h$ når $\alpha \to 0$. (Igjen kunne en kanskje bli litt urolig, for $v = -v_0$ gjør venstre side av (3) lik null og divisjon av (4) med (3) mistenkelig. Men baller med null masse anser vi som like uproblematiske som baller med uendelig masse.)
- $\alpha = 1$: Da vil $v \to v_0$ og $y \to h$. Og det er jo rimelig. De to ballene har lik masse og spretter begge etter hvert tilbake til sine opprinnelige starthøyder. Men den nederste ballen vil selvsagt først ta seg en ekstra runde nedom bakken, med hastighet $v_1 = v_0$, for å overføre en ny porsjon bevegelsesmengde, mv_0, til gulvet, før den endelig spretter tilbake til opprinnelig høyde.

Oppgave 3. Et usannsynlig bratt ovarenn uten friksjon (teller 25 %)
a. Energibevarelse gir:

$$mgh = mgy + mv^2/2 \quad \Rightarrow \quad v(\phi) = \sqrt{2g(h-y)} = \sqrt{2g(h - h(1-\sin\phi))} = \sqrt{2gh}\sqrt{\sin\phi}.$$

Dermed er $b = \sqrt{2gh}$, med (SI-)enhet m/s, som den skal ha. På hoppkanten er $\phi = \pi/2$ og $v = b = \sqrt{2gh}$.

b. Vertikalkomponenten av hopperens hastighet er

$$v_y(\phi) = -v(\phi)\cos\phi = -b\sqrt{\sin\phi}\cos\phi.$$

Ekstremalverdi bestemmes ved å derivere v_y mhp vinkelen ϕ og sette lik null:

$$0 = \frac{dv_y}{d\phi} = -b\left(\frac{1}{2\sqrt{\sin\phi}} \cdot \cos^2\phi - \sin^{3/2}\phi\right).$$

Vi forenkler ved å gange med $2\sqrt{\sin\phi}/b$, samt benytte at $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$2\sin^2\phi - \cos^2\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\sin^2\phi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Kan derivere en gang til, for å kontrollere at det er en *maksimalverdi* som er funnet. Men vi *vet* jo at det ikke kan være en minimalverdi. Alternative svar: $\phi = \arccos\sqrt{2/3}$, $\phi = \arctan 1/\sqrt{2}$. Tallverdier: $\phi \simeq 35°$, $y \simeq 0.42h$.)
Total kraftkomponent på hopperen normalt på ovarennet må være $F_\perp = mv^2/h$ ettersom hopperen følger en sirkulær bane med radius h. Denne kraften består av tyngdens normalkomponent $G_\perp = mg\sin\phi$, rettet bort fra referansepunktet (h, h), og normalkraften fra underlaget N, rettet inn mot referansepunktet (h, h). Dermed:

$$N(\phi) = F_\perp + G_\perp = 2mg\sin\phi + mg\sin\phi = 3mg\sin\phi.$$

c. Med hastighet v vil hopperen bruke en tid $dt = ds/v = hd\phi/v$ på å tilbakelegge en strekning $ds = hd\phi$ i ovarennet. Total tid fra bommen, $\phi = 0$, til hoppkanten, $\phi = \pi/2$, blir derfor

$$T = \int \frac{ds}{v} = \int_0^{\pi/2} \frac{hd\phi}{\sqrt{2gh\sin\phi}} = \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2}\phi \, d\phi.$$

I følge de gitte opplysningene har dette integralet verdien

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)},$$

og av grafen for Γ-funksjonen leser vi av

$$\Gamma(0.25) \simeq 3.6 \quad , \quad \Gamma(0.75) \simeq 1.2.$$

Dermed:

$$T \simeq \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 3 \simeq 1.9\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Så konstanten β er ca 1.9. Fritt fall fra høyden h, med konstant akselerasjon g og starthastighet null, tar en tid $T_g = \sqrt{2h/g} \simeq 1.4\sqrt{h/g}$, som er ca 25 % raskere enn om man tar veien langs ovarennet. I en normal hoppbakke blir nok forskjellen betydelig større.

Oppgave 4. Treghetsmoment og harmonisk oscillator (teller 25 %)

a. Systemets energi tilsvarer prosjektilets kinetiske energi,

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

og prosjektilet har bevegelsesmengde

$$p_0 = m v_0$$

og spinn omkring aksen A,

$$L_0 = m v_0 d/2.$$

Stanga har treghetsmoment (tilstrekkelig å skrive ned I her)

$$I = \frac{1}{12} M d^2.$$

b. Verken energi eller bevegelsesmengde er bevart for systemet i en slik kollisjon, men spinnet omkring aksen A er bevart (jfr oppgave 1f). Etter kollisjonen har vi sammenhengen $L = I\dot{\theta}$, der $\dot{\theta}$ er vinkelhastigheten til stanga. Dette gir

$$m v_0 d/2 = \dot{\theta} M d^2/12 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = 6 m v_0 / M d.$$

Stangas kinetiske energi umiddelbart etter kollisjonen blir

$$E_1 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \cdot \frac{3m}{M} \qquad \left(= \frac{3 p_0^2}{2M} \right).$$

Vi ser da at med $M = 300m$ vil 99 % av den mekaniske energien gå tapt i den uelastiske kollisjonen mellom prosjektilet og stanga.

c. Med små utsving rundt likevekt er sammenpressingen, eventuelt strekket, i fjæra

$$x \simeq -\frac{d}{2} \sin\theta \simeq -\frac{d}{2}\theta.$$

Kraften fra fjæra på stanga er, i følge Hookes lov, $F = -kx \simeq -k\theta d/2$. I følge Newtons 2. lov for rotasjonsbevegelse er da kraftmomentet (evt dreiemomentet) omkring aksen A,

$$\tau = F \cdot d/2 = -k\theta (d/2)^2,$$

lik

$$\dot{L} = I\ddot{\theta} = \ddot{\theta} M d^2/12.$$

Dette gir da differensialligningen

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

med $\omega_0 = \sqrt{3k/M}$. Svingeperioden blir

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{3k}},$$

og setter vi her inn tallverdiene $M = 3.0$ kg og $k = 10^3$ N/m, finner vi $T \simeq 0.2$ s.