TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk
Eksamen 16. des. 2010. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Rett svar:	B	D	C	B	D	C	E	B	C	E	A

Detaljer om spørsmålene:

a. B. Kin. energi = pot. energi: $\frac{1}{2}(m+3m)v^2 = mgh$ gir $v = \sqrt{\frac{1}{2}gh}$.

b. D. $v(t) = \dot{s} = 6,0\ \mathrm{m/s^2} \cdot t + 2,0\ \mathrm{m/s}$ som ved $t = 2,0\,\mathrm{s}$ gir 14 m/s. Effekten kan uttrykkes $P = Fv = 10\,\mathrm{N} \cdot 14\,\mathrm{m/s} = 140\,\mathrm{W}$.

c. C. Støt mellom to roterende skiver. Spinnet (dreieimpulsen), $L = I\omega$, er bevart i alle støt. Dermed halveres vinkelhastigheten etter støtet. Total kinetisk energi etter blir $E_{\mathrm{etter}} = \frac{1}{2}(2I)\,(\omega/2)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot E_{\mathrm{før}}$.

d. B. Må først finne S fra tauet: Kraftmomentbalanse om bjelkens venstre punkt: $S \cdot \sin 30° \cdot L = 50\,\mathrm{N} \cdot L/2 + 150\,\mathrm{N} \cdot L$ gir $S = 350$ N. $\sum F_x = 0$ gir at krafta på bjelken fra hengslingen er $F_x = S_x = S\cos 30° = S \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 303,1$ N. y-komponenten av krafta fra hengslingen, F_y finner vi enkelt fra momentbalanse om ytterpunktet, som gir F_y = 50 N/2. Dette gir $|F| = \sqrt{(303,1)^2 + 25^2}\,\mathrm{N} = 304\,\mathrm{N}$.

e. D. Grensen for å tippe over er når massesenteret ligger rett over nedre kontaktpunkt (momentbalanse). Dette skjer når $\tan\theta = \frac{w/2}{h/2}$, slik at $w = h \cdot \tan 49,6° = 8,00\,\mathrm{cm} \cdot 1,175 = 9,40$ cm.

f. C. Snorkraft $S = mg + F_{\mathrm{c}} = mg + mv^2/\ell$ og farten bestemmes av energibevaring: $mg(\ell - \ell/4) = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow mv^2 = \frac{3}{2}mg\ell$. Dette gir $S = mg + \frac{3}{2}mg = \frac{5}{2}mg$.

g. E. Kraftstøt er lik for begge klosser, derfor endring i bevegelsesmengde lik: $F \cdot t = p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{B}}$. Den lettere klossen A før større akselerasjon og hastighet og bevegerer seg lenger enn kloss B i 1,0 s, slik at den mottar et større arbeid $W = Fs$ og dermed oppnår større kinetisk energi. Eller: $E_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}}^2 = \frac{1}{2}\frac{p_{\mathrm{A}}^2}{m_{\mathrm{A}}}$ mens $E_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\frac{p_{\mathrm{B}}^2}{m_{\mathrm{B}}}$. Siden $m_{\mathrm{B}} > m_{\mathrm{A}}$ er $E_{\mathrm{A}} > E_{\mathrm{B}}$.

h. B. Kollisjonen er fullstendig uelastisk, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Da staven ligger fritt og friksjonsfritt bå bordet er det ingen ytre krefter eller ytre kraftmoment under støtet, da er både bevegelsesmengden p og spinnet L bevart.

i. C. Da ingen ytre krefter virker er spinnet L konstant. Jentene gjør indre arbeid når de "klatrer" inn mot sentrum, slik at energien øker. Dette kan også beregnes: Spinnet $L = I\omega$ konstant mens I avtar og ω øker. $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}L\omega$ må da øke.

j. E. Perioden er $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, altså kun avhengig av massen og fjærstivheten. Når disse ikke endres, endres heller ikke systemets periode.

k. A. $0 \equiv z(0) = A\cos(\phi) \Rightarrow \phi = 90°$ eller $\phi = 270°$. Hastigheten $\dot{z}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$ og startverdien $v_0 \equiv \dot{z}(0) = -A\omega\sin(\phi)$ gir mulighetene $\phi = 90°, A = -v_0/\omega$ eller $\phi = 270°, A = v_0/\omega$. Kun den siste muligheten er oppgitt.

Oppgave 2. Rullebevegelse

a.

$$E_{\mathrm{bunn}} = E_{\mathrm{topp}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{7}{10}Mv^2 + 0 = \frac{7}{10}Mv_{\mathrm{t}}^2 + MgH$$

som gir fart på jordstykket

$$v_{\mathrm{t}} = \sqrt{v^2 - \frac{10}{7}gH} = \sqrt{(25,0)^2\,\mathrm{m^2/s^2} - \frac{10}{7} \cdot 9,81 \cdot 28\,\mathrm{m^2/s^2}} = 15,25\,\mathrm{m/s} = \underline{15,3\,\mathrm{m/s}}.$$

b. Etter kula forlater skrenten er rotasjonen og dermed rotasjonsenergien $\frac{1}{2}I\omega^2$ uendra.

$$E_{\mathrm{topp}} = E_{\mathrm{slette}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{t}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + MgH = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{j}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 0$$

som gir

$$v_{\mathrm{j}} = \sqrt{v_{\mathrm{t}}^2 + 2gH} = \sqrt{(15,25)^2\,\mathrm{m^2/s^2} + 2 \cdot 9,81 \cdot 28\,\mathrm{m^2/s^2}} = 27,96\,\mathrm{m/s} = \underline{28,0\,\mathrm{m/s}}.$$

c. Vi må finne tida som fallet tar, og deretter $s_{\mathrm{hor}} = v_{\mathrm{hor}} t$, hvor $v_{\mathrm{hor}} = v_{\mathrm{t}}$ fordi den horisontale hastigheten ikke endres. Tida finnes fra vertikalt fall:

$$H = \frac{1}{2} g t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{2H/g} = \sqrt{2 \cdot 28,0\,\mathrm{m}/9,81\,\mathrm{m/s^2}} = 2,389\,\mathrm{s},$$

som videre gir

$$s_{\mathrm{hor}} = v_{\mathrm{t}} \cdot t = 15,25\,\mathrm{m/s} \cdot 2,389\,\mathrm{s} = 36,43\,\mathrm{m} = \underline{36,4\,\mathrm{m}}\,.$$

Oppgave 3. Sylinder

a. Uten friksjon er det kun snakk om translasjon, og tyngden til klossen gir følgende akselerasjon (Newton 2 for systemet av kloss+sylinder)

$$a = \frac{\Sigma F}{\Sigma M} = \frac{Mg}{2M} = \underline{\frac{1}{2} g = 0,50 \cdot g.}$$

b. Ved rein rulling er $a = \alpha R$. Treghetsmomentet til en massiv sylinder er $I = \frac{1}{2} M R^2$. Rotasjonsakselerasjonen for sylinderen kommer fra friksjonskraft F_{f} som må virke mot venstre. Newton 2 (translasjon) for systemet kloss+sylinder gir

$$Mg - F_{\mathrm{f}} = 2M \cdot a, \tag{1}$$

mens spinnsatsen (N2-rot) for sylinderen gir

$$\tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{f}} R = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{f}} = \frac{1}{2} M a. \tag{2}$$

Uttrykket (2) for F_{f} innsatt i likn. (1) gir

$$Mg - \frac{1}{2} M a = 2M \cdot a \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2} M a = Mg \quad \Rightarrow \quad a = \underline{\frac{2}{5} g = 0,40 \cdot g\,.}$$

c. Sylinderen vil gli bortover med delvis rulling. Friksjonen blir kinematisk, og da ikke annet er oppgitt må vi anta at kinematisk frik. koeffisient er lik statisk: $\mu_{\mathrm{k}} = 0,10$ (det burde vært oppgitt i oppgaveteksten). Friksjonskrafta virker mot venstre og er lik $F_{\mathrm{f}} = 0,10 \cdot F_{\mathrm{N}} = 0,10 \cdot Mg$. Likn. (1) gir

$$Mg - F_{\mathrm{f}} = 2M \cdot a \quad \Rightarrow \quad Mg - 0,10 \cdot Mg = 2M \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \underline{\frac{9}{20} g = 0,45 \cdot g.}$$

Hvis ikke antar verdi for μ_{k} blir $F_{\mathrm{f}} = \mu_{\mathrm{k}} M g$ og gyldig svar $a = \dfrac{1}{2}(1 - \mu_{\mathrm{k}})\, g$.

d. Vi har funnet at ved rein rulling er $a = \frac{2}{5} g$. Ved å sette verdien inn i uttrykket (2) finner vi at dette krever en friksjon med størrelse

$$F_{\mathrm{f}} = \frac{1}{2} M a = \frac{1}{2} M \cdot \frac{2}{5} g = 0,20 \cdot Mg\,.$$

Da $F_{\mathrm{N}} = Mg$ kreves en friksjonskoeffisient på minst $\underline{\mu_{\mathrm{s}} = 0,20}$.

e. Pga. konstant a og α er $v = at$ og $\omega = \alpha t$ og dermed $\dfrac{v}{\omega} = \dfrac{a}{\alpha}$. Friksjonskrafta $F_{\mathrm{f}} = \dfrac{1}{10} Mg$ bestemmer rotasjonsakselerasjonen (spinnsatsen)

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{F_{\mathrm{f}} R}{\frac{1}{2} M R^2} = \frac{\frac{1}{10} M g R}{\frac{1}{2} M R^2} = \frac{2\ g}{10\ R}.$$

Akselerasjonen ved rulling er funnet i **c.**: $a = \dfrac{9}{20} g$. Dermed er $\dfrac{v}{\omega} = \dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{\frac{9}{20} g}{\frac{2\ g}{10\ R}} = \underline{\dfrac{9}{4}} R = \underline{2,25 \cdot R}.$

Hvis ikke antar verdi for μ_{k} blir gyldig svar $\dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{\frac{1}{2}(1 - \mu_{\mathrm{k}})\, g}{\frac{2\mu_{\mathrm{k}}\, g}{R}} = \dfrac{1 - \mu_{\mathrm{k}}}{4\mu_{\mathrm{k}}} R.$

Oppgave 4. Leketøyskanon

a. Det er ingen ytre krefter under utskytingen (omvendt kollisjon) og bevegelsesmengden er bevart:

$$0 = MV' + mv' \qquad \Rightarrow \qquad V' = -v\frac{m}{M} = -12,0\,\mathrm{m/s} \cdot \frac{60,0}{240} = \underline{-3,00\,\mathrm{m/s}},$$

motsatt retning av ballen.

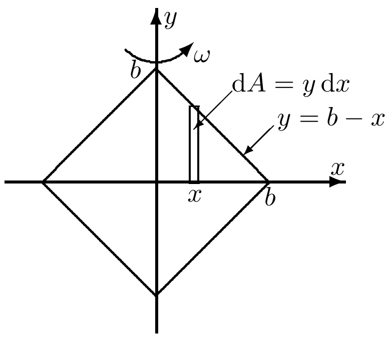
b. Her er det kanskje enklest å regne ut tallverdier:
Ballens kinetiske energi: $E_{\text{ball}} = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,0600\,\text{kg} \cdot (12,0\,\text{m/s})^2 = 4,320\,\text{J}$.
Kanonens kinetiske energi: $E_{\text{kan}} = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,240\,\text{kg} \cdot (3,00\,\text{m/s})^2 = 1,080\,\text{J}$.
Total energi etter $E' = 5,400\,J$.
Tapet er 20% slik at med E_p i fjæra før utskyting er $E' = 0,80 \cdot E_\text{p}$, altså $E_\text{p} = 1,25 \cdot E' = 6,750\,\text{J}$.
Det spørres etter

$$\frac{E_{\text{ball}}}{E_\text{p}} = \frac{\frac{1}{2}mv'^2}{E_\text{p}} = \frac{4,320\,\text{J}}{6,750\,\text{J}} = \underline{0,640}\,.$$

c. Fjæras energi er $E_\text{p} = \frac{1}{2}kx^2$, og E_p har vi funnet verdi for i **b.**, slik at fjæra før utløsning må ha vært sammentrykt

$$x = \sqrt{\frac{2E_\text{p}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,750\,\text{J}}{4000\,\text{N/m}}} = 0,05810\,\text{m} = \underline{5,81\,\text{cm}}\,.$$

Oppgave 5. Treghetsmoment



a. Pga. symmetri er treghetsmoment I for hver kvadrant av rektanglet like store, beregner derfor I for øvre høyre kvadrant (positiv x og y) og multipliserer med 4. Med koordinatsystem (x, y) og rotasjon om y-aksen som foreslått velges et infinitesimalt masseelement $\mathrm{d}m$ i avstand x fra y-aksen, bredde $\mathrm{d}x$ og høyde $y = b - x$. Da er

$$\mathrm{d}m = m \cdot \frac{\text{andel areal}}{\text{totalt areal}} = m \cdot \frac{y\,\mathrm{d}x}{2b^2} = m \cdot \frac{(b-x)\,\mathrm{d}x}{2b^2}$$

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}m \cdot x^2$$

$$I = 4\int_0^b x^2 \mathrm{d}m = 4\frac{m}{2b^2}\int_0^b x^2(b-x)\mathrm{d}x = \frac{2m}{b^2}\left[b\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^b = \frac{2m}{b^2}\left[\frac{1}{3}b^4 - \frac{1}{4}b^4\right] = 2m\left[\frac{1}{12}\right]b^2 = \underline{\frac{1}{6}mb^2}\,.$$

Oppgave 6. Gravitasjon

a. Fra oppgitt E_p og at gravitasjonen er en konservativ kraft med $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_\text{p}(\vec{r})$, får vi når F og E_p bare er avhengig av r:

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_\text{p}(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{GMm}{2R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) = -\frac{GMm}{2R}\frac{2r}{R^2} = -\frac{GMm}{R^3}r \qquad \Rightarrow \qquad \underline{k = \frac{GMm}{R^3}}\,.$$

b. Energien er bevart:

$$E_{\text{tot}} = E_\text{p}(R) = E_\text{k}(r) + E_\text{p}(r) = \frac{1}{2}mv^2 + E_\text{p}(r)$$

Vi setter inn for R og r i oppgitt E_p:

$$\begin{aligned} -\frac{GMm}{2R}\left(3 - \frac{R^2}{R^2}\right) &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \\ v^2 &= \frac{GM}{R}\cdot\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \\ v(r) &= \underline{\sqrt{\frac{GM}{R}\cdot\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}\cdot(R^2 - r^2)}}\,. \end{aligned}$$

Hastigheten har selvfølgelig retning inn mot sentrum og burde vært angitt negativ.

c. Tida t_0 fra overflata til sentrum kan finnes fra hastigheten ved å integrere likningen $v(r) = -\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ (vi har definert positiv v inn mot sentrum, slik at $\mathrm{d}r < 0$ skal gi positiv v):

$$\int_0^{t_0} \mathrm{d}t = -\int_R^0 \frac{\mathrm{d}r}{v(r)}.$$

Med $v(r)$ fra **b.** og oppgitt integral gir dette

$$t_0 = +\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\int_0^R \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}}\left[\arcsin\frac{r}{R}\right]_0^R = \sqrt{\frac{R^3}{GM}}\,[\pi/2 - 0] = \underline{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{GM}}}\,.$$

A Mikkelsen 22. des. 2010