Institutt for fysikk 2010 **TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk**

Eksamen 16. des. 2010. Løsningsforslag

Dette løsningsforslaget er spesielt fyldig med flere alternative løsninger, som brukt av flere studenter i eksamensbesvarelsen. Det er også nevnt noen av de typiske feilene som er begått. Dette er gitt med liten skrifttype som her.

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Rett svar:	B	D	C	B	D	C	E	B	C	E	A

Detaljer om spørsmålene:

a. B. Kin. energi = pot. energi: $\frac{1}{2}(m+3m)v^2 = mgh$ gir $v = \sqrt{\frac{1}{2}gh}$.

b. D. $v(t) = \dot{s} = 6,0\ \mathrm{m/s^2} \cdot t + 2,0\ \mathrm{m/s}$ som ved $t = 2,0\,\mathrm{s}$ gir 14 m/s. Effekten kan uttrykkes $P = Fv = 10\,\mathrm{N} \cdot 14\,\mathrm{m/s} = 140\,\mathrm{W}$.
Flertallet har feilaktig svart B av en eller annen grunn.

c. C. Støt mellom to roterende skiver. Spinnet (dreieimpulsen), $L = I\omega$, er bevart i alle støt. Dermed halveres vinkelhastigheten etter støtet. Total kinetisk energi etter blir $E_{\mathrm{etter}} = \frac{1}{2}(2I)\,(\omega/2)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot E_{\mathrm{før}}$.

d. B. Må først finne S fra tauet: Kraftmomentbalanse om bjelkens venstre punkt: $S \cdot \sin 30° \cdot L = 50\,\mathrm{N} \cdot L/2 + 150\,\mathrm{N} \cdot L$ gir $S = 350$ N. $\sum F_x = 0$ gir at krafta på bjelken fra hengslingen er $F_x = S_x = S\cos 30° = S \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 303,1$ N. y-komponenten av krafta fra hengslingen, F_y finner vi enkelt fra momentbalanse om ytterpunktet, som gir $F_y = 50$ N/2. Dette gir $|F| = \sqrt{(303,1)^2 + 25^2}\,\mathrm{N} = 304\,\mathrm{N}$.
Litt mye beregning til å være god flervalgsoppgave, men det var ingen statikkoppgave av ordinær type. Og flertallet har truffet rett svar.

e. D. Grensen for å tippe over er når massesenteret ligger rett over nedre kontaktpunkt (momentbalanse). Dette skjer når $\tan\theta = \frac{w/2}{h/2}$, slik at $w = h \cdot \tan 49,6° = 8,00\,\mathrm{cm} \cdot 1,175 = 9,40$ cm.

f. C. Snorkraft $S = mg + F_{\mathrm{c}} = mg + mv^2/\ell$ og farten bestemmes av energibevaring: $mg(\ell - \ell/4) = \frac{1}{2}mv^2 \;\Rightarrow\; mv^2 = \frac{3}{2}mg\ell$. Dette gir $S = mg + \frac{3}{2}mg = \frac{5}{2}mg$.

g. E. Kraftstøt er lik for begge klosser, derfor endring i bevegelsesmengde lik: $F \cdot t = p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{B}}$. Den lettere klossen A før større akselerasjon og hastighet og bevegerer seg lenger enn kloss B i 1,0 s, slik at den mottar et større arbeid $W = Fs$ og dermed oppnår større kinetisk energi. Eller: $E_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}}^2 = \frac{1}{2}\frac{p_{\mathrm{A}}^2}{m_{\mathrm{A}}}$ mens $E_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\frac{p_{\mathrm{B}}^2}{m_{\mathrm{B}}}$. Siden $m_{\mathrm{B}} > m_{\mathrm{A}}$ er $E_{\mathrm{A}} > E_{\mathrm{B}}$.

h. B. Kollisjonen er fullstendig uelastisk, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Da staven ligger fritt og friksjonsfritt bå bordet er det ingen ytre krefter eller ytre kraftmoment under støtet, da er både bevegelsesmengden p og spinnet L bevart.
Mange har svart D: Bare L, og er nok villedet av fjorårets eksamensoppgave med påhopp på karusell. Karusellen står fast på aksling og får påført ytre kraft, men denne staven ligger helt fritt på bordet.

i. C. Da ingen ytre krefter virker er spinnet L konstant. Jentene gjør indre arbeid når de "klatrer" inn mot sentrum, slik at energien øker. Dette kan også beregnes: Spinnet $L = I\omega$ konstant mens I avtar og ω øker. $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}L\omega$ må da øke.

j. E. Perioden er $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, altså kun avhengig av massen og fjærstivheten. Når disse ikke endres, endres heller ikke systemets periode.

k. A. $0 \equiv z(0) = A\cos(\phi) \Rightarrow \phi = 90°$ eller $\phi = 270°$. Hastigheten $\dot{z}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$ og startverdien $v_0 \equiv \dot{z}(0) = -A\omega\sin(\phi)$ gir mulighetene $\phi = 90°, A = -v_0/\omega$ eller $\phi = 270°, A = v_0/\omega$. Kun den siste muligheten er oppgitt.

Oppgave 2. Rullebevegelse

a.

$$E_{\mathrm{bunn}} = E_{\mathrm{topp}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{7}{10}Mv^2 + 0 = \frac{7}{10}Mv_{\mathrm{t}}^2 + MgH$$

som gir fart på jordstykket

$$v_{\mathrm{t}} = \sqrt{v^2 - \frac{10}{7}gH} = \sqrt{(25,0)^2\,\mathrm{m^2/s^2} - \frac{10}{7} \cdot 9,81 \cdot 28\,\mathrm{m^2/s^2}} = 15,25\,\mathrm{m/s} = \underline{15,3\,\mathrm{m/s}}.$$

Noen tok til å tenke på arbeidet til friksjonskrafta. Men med rein rulling er friksjonen statisk og fører ikke til noe energitap (ingen forskyvning mellom underlag og kule). Derfor er energien bevart.
Noen har også skaffet seg merarbeid ved å dele opp translasjonsenergi og rotasjonsenergi, men det var jo hensikten å bruke oppgitt uttrykk for kule: $E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2$.

b. Etter kula forlater skrenten er rotasjonen og dermed rotasjonsenergien $\frac{1}{2}I\omega^2$ uendra.

$$E_{\text{topp}} = E_{\text{slette}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}Mv_{\text{t}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + MgH = \frac{1}{2}Mv_{\text{j}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 0$$

som gir

$$v_{\text{j}} = \sqrt{v_{\text{t}}^2 + 2gH} = \sqrt{(15,25)^2\,\text{m}^2/\text{s}^2 + 2\cdot 9,81\cdot 28\,\text{m}^2/\text{s}^2} = 27,96\,\text{m/s} = \underline{28,0\,\text{m/s}}\,.$$

Det er alternative måter å regne ut. De fleste har basert seg på at horisontal hastighet $v_x = v_{\text{t}}$ fortsetter uendra mens v_y kommer i tillegg og beregnes fra f.eks. (tidløs likning) $v_y^2 = 2gH$, som gir $v_y = 23{,}44$ m/s og $v_{\text{j}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 28,0\,\text{m/s}$. v_y kan også beregnes ved først å finne tid (se pkt. c) og $v_y = gt$.

Det er her viktig å huske på at rotasjonen fortsetter uendra, noen har bommet her her. Det blir derfor feil å si at farten blir som startfarten 25 m/s med begrunnelse at kula er nådd fram til samme høyde null.

Kan også beregne ved energibevaring fra start:

$$E_{\text{start}} = E_{\text{slette}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{7}{10}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv_{\text{j}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_{\text{j}}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}Mr^2\frac{v_{\text{t}}^2}{r^2} = \frac{1}{2}Mv_{\text{j}}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}Mv_{\text{t}}^2\,.$$

Unngår altså ikke å bruke v_{t}. Dette gir

$$v_{\text{j}} = \sqrt{\frac{7}{5}v^2 - \frac{2}{5}v_{\text{t}}^2} = \sqrt{\frac{7}{5}(25,0)^2\,\text{m}^2/\text{s}^2 - \frac{2}{5}\cdot(15,25)^2\,\text{m}^2/\text{s}^2} = 28,0\,\text{m/s}\,.$$

c. Vi må finne tida som fallet tar, og deretter $s_{\text{hor}} = v_{\text{hor}}t$, hvor $v_{\text{hor}} = v_{\text{t}}$ fordi den horisontale hastigheten ikke endres. Tida finnes fra vertikalt fall:

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{2H/g} = \sqrt{2\cdot 28,0\,\text{m}/9,81\,\text{m/s}^2} = 2,389\,\text{s},$$

som videre gir

$$s_{\text{hor}} = v_{\text{t}}\cdot t = 15,25\,\text{m/s}\cdot 2,389\,\text{s} = 36,43\,\text{m} = \underline{36,4\,\text{m}}\,.$$

Eller ved å sette inn uttrykk:

$$s_{\text{hor}} = v_{\text{t}}\cdot t = \sqrt{v^2 - \frac{10}{7}gH}\cdot\sqrt{2H/g} = \sqrt{v^2\cdot\frac{2H}{g} - \frac{20}{7}H^2} = \sqrt{(25,0)^2\cdot\frac{2\cdot 28}{9,81} - \frac{20}{7}(28,0)^2}\,\text{m} = \underline{36,4\,\text{m}}\,.$$

<u>Oppgave 3.</u> Sylinder

a. Uten friksjon er det kun snakk om translasjon, og tyngden til klossen gir følgende akselerasjon (Newton 2 for systemet av kloss+sylinder)

$$a = \frac{\Sigma F}{\Sigma M} = \frac{Mg}{2M} = \underline{\frac{1}{2}g = 0,50\cdot g}.$$

Et alternativ er å sette opp N2 for klossen og sylinderen hver for seg inklusiv snorkrafta S. To ukjente a og S gir svarene $a = g/2$ og $S = Mg/2$. Mange har svart $a = g$, som er en fatal feil. Sylinderen må jo også akselereres av tungdekrafta Mg.

b. Ved rein rulling er $a = \alpha R$. Treghetsmomentet til en massiv sylinder er $I = \frac{1}{2}MR^2$. Rotasjonsakselerasjonen for sylinderen kommer fra friksjonskraft F_{f} som må virke mot venstre. Newton 2 (translasjon) for systemet kloss+sylinder gir

$$Mg - F_{\text{f}} = 2M\cdot a, \tag{1}$$

mens spinnsatsen (N2-rot) for sylinderen gir

$$\tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad F_{\text{f}}R = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{f}} = \frac{1}{2}Ma. \tag{2}$$

Uttrykket (2) for F_{f} innsatt i likn. (1) gir

$$Mg - \frac{1}{2}Ma = 2M\cdot a \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}Ma = Mg \quad \Rightarrow \quad a = \underline{\frac{2}{5}g = 0,40\cdot g}\,.$$

En vanlig feil her er å bruke kun én masse Ma i (1). Kan alternativt (mer arbeid) sette opp N2 for kloss og sylinder hver for seg, der den ukjente snorkrafta S inngår. Her er også vanlig feil å sette $S = mg$.

c. Sylinderen vil gli bortover med delvis rulling. Friksjonen blir kinematisk, og da ikke annet er oppgitt må vi anta at kinematisk frik. koeffisient er lik statisk: $\mu_{\text{k}} = 0,10$ (det burde vært oppgitt i oppgaveteksten). Friksjonskrafta virker mot venstre og er lik $F_\mathrm{f} = 0,10 \cdot F_\mathrm{N} = 0,10 \cdot Mg$. Likn. (1) gir

$$Mg - F_\mathrm{f} = 2M \cdot a \quad \Rightarrow \quad Mg - 0,10 \cdot Mg = 2M \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \underline{\frac{9}{20}g = 0,45 \cdot g}.$$

Hvis ikke antar verdi for μ_k blir $F_\mathrm{f} = \mu_\mathrm{k} Mg$ og gyldig svar $a = \dfrac{1}{2}(1 - \mu_\mathrm{k})\, g$.

Dette er enklere oppgave enn **b.** idet vi ikke trenger betrakte rotasjonen av sylinderen. Det var jo bare spørsmål om translasjonen og da er det bare Mg og F_f som har betydning. Det er først i opg. **e.** vi også må regne på rotasjonen.
Her var også en vanlig feil å bruke $M\,a$ isf. å huske at begge legemene skal akselereres og derfor $2Ma$.

d. Vi har funnet at ved rein rulling er $a = \frac{2}{5}g$. Ved å sette verdien inn i uttrykket (2) finner vi at dette krever en friksjon med størrelse

$$F_\mathrm{f} = \frac{1}{2}Ma = \frac{1}{2}M \cdot \frac{2}{5}g = 0,20 \cdot Mg\,.$$

Da $F_\mathrm{N} = Mg$ kreves en friksjonskoeffisient på minst $\underline{\mu_\mathrm{s} = 0,20}$.

Alternativt kan man også bruke translasjons-N2 for kloss+sylinder: $Mg - F_\mathrm{f} = 2Ma$, som med innsatt $a = \frac{2}{5}g$ gir $F_\mathrm{f} = \frac{1}{5}Mg$.

e. Pga. konstant a og α er $v = at$ og $\omega = \alpha t$ og dermed $\dfrac{v}{\omega} = \dfrac{a}{\alpha}$. Friksjonskrafta $F_\mathrm{f} = \dfrac{1}{10}Mg$ bestemmer rotasjonsakselerasjonen (spinnsatsen)

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{F_\mathrm{f} R}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{\frac{1}{10}MgR}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2\;g}{10\;R}.$$

Akselerasjonen ved rulling er funnet i **c.**: $a = \dfrac{9}{20}g$. Dermed er $\dfrac{v}{\omega} = \dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{\frac{9}{20}g}{\frac{2\;g}{10\;R}} = \underline{\dfrac{9}{4}}R = \underline{2,25 \cdot R}$.

Hvis ikke antar verdi for μ_k blir gyldig svar $\dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{\frac{1}{2}(1 - \mu_\mathrm{k})\, g}{\frac{2\mu_\mathrm{k}\, g}{R}} = \dfrac{1 - \mu_\mathrm{k}}{4\mu_\mathrm{k}}R$.

Oppgave 4. Leketøyskanon

a. Det er ingen ytre krefter under utskytingen (omvendt kollisjon) og bevegelsesmengden er bevart:

$$0 = MV' + mv' \qquad \Rightarrow \qquad V' = -v\frac{m}{M} = -12,0\,\mathrm{m/s} \cdot \frac{60,0}{240} = \underline{-3,00\,\mathrm{m/s}},$$

motsatt retning av ballen.

b. Her er det kanskje enklest å regne ut tallverdier:
Ballens kinetiske energi: $E_\mathrm{ball} = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,0600\,\mathrm{kg} \cdot (12,0\,\mathrm{m/s})^2 = 4,320\,\mathrm{J}$.
Kanonens kinetiske energi: $E_\mathrm{kan} = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,240\,\mathrm{kg} \cdot (3,00\,\mathrm{m/s})^2 = 1,080\,\mathrm{J}$.
Total energi etter $E' = 5,400\,J$.
Tapet er 20% slik at med E_p i fjæra før utskyting er $E' = 0,80 \cdot E_\mathrm{p}$, altså $E_\mathrm{p} = 1,25 \cdot E' = 6,750\,\mathrm{J}$.
Det spørres etter

$$\frac{E_\mathrm{ball}}{E_\mathrm{p}} = \frac{\frac{1}{2}mv'^2}{E_\mathrm{p}} = \frac{4,320\,\mathrm{J}}{6,750\,\mathrm{J}} = \underline{0,640}\,.$$

Alternativ utregning med symboler, idet vi merker oss at $M = 4m$ og $V' = v'/4$:
$E_\mathrm{ball} = \frac{1}{2}mv'^2$, $\quad E_\mathrm{kan} = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2}4m\,(v'/4)^2 = E_\mathrm{ball}/4$, $\quad$ Total energi etter $E' = E_\mathrm{ball} + E_\mathrm{kan} = \frac{5}{4}E_\mathrm{ball}$.
Som over med $E_\mathrm{p} = 1,25 \cdot E' = \frac{5}{4}E'$ får vi

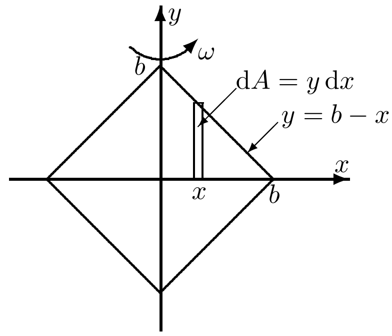
$$\frac{E_\mathrm{ball}}{E_\mathrm{p}} = \frac{E_\mathrm{ball}}{\frac{5}{4}E'} = \frac{E_\mathrm{ball}}{\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot E_\mathrm{ball}} = \underline{\frac{16}{25}} = 0,640\,.$$

c. Fjæras energi er $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2$, og E_p har vi funnet verdi for i **b.**, slik at fjæra før utløsning må ha vært sammentrykt

$$x = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{p}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,750\,\mathrm{J}}{4000\,\mathrm{N/m}}} = 0,05810\,\mathrm{m} = \underline{5,81\,\mathrm{cm}}\,.$$

Her var en typisk og unødvendig feil å klusse med cm og meter for k. Det er noe en fysiker må mestre.

Oppgave 5. Treghetsmoment



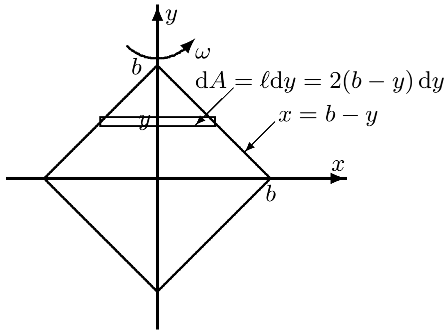
a. Pga. symmetri er treghetsmoment I for hver kvadrant av rektanglet like store, beregner derfor I for øvre høyre kvadrant (positiv x og y) og multipliserer med 4. Med koordinatsystem (x, y) og rotasjon om y-aksen som foreslått velges et infinitesimalt masseelement $\mathrm{d}m$ i avstand x fra y-aksen, bredde $\mathrm{d}x$ og høyde $y = b - x$. Da er

$$\mathrm{d}m = m \cdot \frac{\text{andel areal}}{\text{totalt areal}} = m \cdot \frac{y\,\mathrm{d}x}{2b^2} = m \cdot \frac{(b-x)\,\mathrm{d}x}{2b^2}$$

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}m \cdot x^2$$

$$I = 4\int_0^b x^2 \mathrm{d}m = 4\frac{m}{2b^2}\int_0^b x^2(b-x)\mathrm{d}x = \frac{2m}{b^2}\left[b\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^b = \frac{2m}{b^2}\left[\frac{1}{3}b^4 - \frac{1}{4}b^4\right] = 2m\left[\frac{1}{12}\right]b^2 = \underline{\frac{1}{6}mb^2}\,.$$

Utrolig hvor mye regning mange presterer på denne oppgaven, opp til 4 sider på det meste. Noen få har beregnet I om en akse gjennom sentrum og normalt på kvadratet, og svaret skal her forresten bli $I_z = \frac{1}{3}mb^2$, slik at $I_z = I_x + I_y$ (normalakseteoremet, gjennomgått i forelesning, men ikke pensum).



Oppgaven er en test om 1) definisjonen av treghetsmentet er forstått og 2) man mestrer infinitesimal oppdeling og integrasjon. Det er flere alternativer å dele opp infinitesimalt.
En annen god løsning som flere anvender, er oppdeling i tynne staver parallelt med x-aksen og med

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{12}\,\mathrm{d}m\,\ell^2$$

for hver av disse. Integrasjonen blir denne gangen i y-retning der

$$\mathrm{d}m = m \cdot \frac{\ell \mathrm{d}y}{2b^2} \quad \text{og} \quad \ell = 2(b-y)\,.$$

Integrert over øvre halvdel av kvadratet multiplisert med 2:

$$I = 2\int_0^b \mathrm{d}I = 2\frac{m}{2b^2}\cdot\frac{1}{12}\int_0^b \ell^3 \mathrm{d}y = \frac{m}{12b^2}\cdot\int_0^b 2^3\,(b-y)^3\,\mathrm{d}y = \frac{2m}{3b^2}\cdot\left[-\frac{1}{4}\,(b-y)^4\right]_0^b = \underline{\frac{1}{6}mb^2}\,.$$

Oppgave 6. Gravitasjon

a. Fra oppgitt E_p og at gravitasjonen er en konservativ kraft med $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_\mathrm{p}(\vec{r})$, får vi når F og E_p bare er avhengig av r:

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{GMm}{2R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) = -\frac{GMm}{2R}\frac{2r}{R^2} = -\frac{GMm}{R^3}r \qquad \Rightarrow \qquad \underline{k = \frac{GMm}{R^3}}\,.$$

Alternativt med argumentasjon at kun masse innenfor radius r har betydning (da kuleskallet utenfor netto nuller ut gravitasjonen):

$$M_\text{innenfor} = M \cdot \text{volumandel} = M \cdot \frac{4/3\;\pi r^3}{4/3\;\pi R^3} = M \cdot \frac{r^3}{R^3} \qquad \Rightarrow \qquad F = -G\frac{M_\text{innenfor}m}{r^2} = -\frac{GMm}{R^3}r.$$

Eller det enkleste alternativet å gjenkjenne (!) at ved jordoverflata må $F(R) = -G\frac{mM}{R^2}$, altså lik den "ordinære" gravitasjonskrafta ved jordoverflata, og dette gir

$$F(R) = -kR = -G\frac{mM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{GMm}{R^3}\,.$$

b. Energien er bevart:

$$E_\text{tot} = E_\mathrm{p}(R) = E_\mathrm{k}(r) + E_\mathrm{p}(r) = \frac{1}{2}mv^2 + E_\mathrm{p}(r)$$

Vi setter inn for R og r i oppgitt E_p:

$$\begin{aligned} -\frac{GMm}{2R}\left(3 - \frac{R^2}{R^2}\right) &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \\ v^2 &= \frac{GM}{R}\cdot\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \\ v(r) &= \underline{\sqrt{\frac{GM}{R}\cdot\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}\cdot(R^2 - r^2)}}\,. \end{aligned}$$

Hastigheten har selvfølgelig retning inn mot sentrum og burde vært angitt negativ.

Alternativ beregning av E_p fra definisjon (lik minus arbeid påført) og bruk av $F = -kr$:

$$E_\mathrm{p}(r) - E_\mathrm{p}(R) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\int_R^r F\mathrm{d}r = -\int_R^r (-kr)\mathrm{d}r = \frac{1}{2}k(r^2 - R^2).$$

Energibevaring: $\Delta E_\mathrm{p} = -\Delta E_\mathrm{k}$ gir

$$\frac{1}{2}mv^2 = -(E_\mathrm{p}(r) - E_\mathrm{p}(R)) = \frac{1}{2}k(R^2 - r^2) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}(R^2 - r^2)}\,.$$

En tanke ved denne oppgaven var om noen gjenkjenner at $F = -kr$ er som kraft for en harmonisk oscillator (SHM), dvs. massen vil svinge gjennom hullet som en masse/fjær-svingning med likevektspunkt i jordsentrum og $\omega = \sqrt{k/m}$ (formelark). Det kan utnyttes i **c.** (se under), men også her ved å bruke energi $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kr^2$ for harmonisk oscillator, med valg $E_\mathrm{p} = 0$ i sentrum. Energibevaring gir

$$E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}kR^2 + 0 = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}(R^2 - r^2)}\,,$$

som jo var det som gav minimum med regning.

Hvis man først gjenkjenner en SHM kan man jo også bruke posisjon og hastighet for en SHM som funk. av tid, og derfra finne $v(r)$, men dette er vel ikke den enkleste løsningen:

$$r(t) = R\cos(\omega t) \quad \text{og} \quad v(t) = \dot{r}(t) = -\omega R\sin(\omega t),$$

med v positiv mot stigende r. Da kan vi finne v uttrykt ved r:

$$\omega t = \arccos\frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad v(r) = -\omega R\sin(\arccos\frac{r}{R})$$

Men $\sin(\arccos\phi) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos\phi)} = \sqrt{1 - \phi^2}$ slik at

$$v(r) = -\omega R\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} = -\sqrt{\frac{k}{m}}R\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} = -\sqrt{\frac{k}{m}(R^2 - r^2)}$$

som ovenfor.

c. Tida t_0 fra overflata til sentrum kan finnes fra hastigheten ved å integrere likningen $v(r) = -\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ (vi har definert positiv v inn mot sentrum, slik at $\mathrm{d}r < 0$ skal gi positiv v):

$$\int_0^{t_0} \mathrm{d}t = -\int_R^0 \frac{\mathrm{d}r}{v(r)}.$$

Med $v(r)$ fra **b.** og oppgitt integral gir dette

$$t_0 = +\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\int_0^R \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}}\left[\arcsin\frac{r}{R}\right]_0^R = \sqrt{\frac{R^3}{GM}}\,[\pi/2 - 0] = \underline{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{GM}}}\,.$$

Her er det arbeidsbesparende å gjenkjenne SHM. Tida for en full periode er $T = 2\pi/\omega$, og med ω som ovenfor blir tida fra jordas overflate til sentrum 1/4 av dette:

$$t_0 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\,.$$

Om noen er interessert, er tallverdien $T = 4t_0 = 5,055 \cdot 10^3$ s = 1h 24min 15s. Denne tida er forresten nøyaktig lik omløpstida for en satelitt rett over jordoverflata. Dette er et eksempel på at alle satelittbaner med samme store halvakse har samme periode T, og hullsvingningen er her en degenerert ellipse med halvakse R. Men dette var sjølvsagt ikke ment kommentert til eksamen.

Noen bruker konstant-akselerasjonslikninger i **b.** og **c.**, som er en bommert, krafta og akselerasjonen avhenger jo i høyeste grad av r og dermed t.

Hverken i pkt. **a.** eller **b.** er det strengt tatt nødvendig å bruke oppgitt uttrykk for E_p, men var ment som en hjelp og om man dermed forstår betydningen av potensiell energi.

A Mikkelsen 22. des. 2010