Institutt for fysikk 2013

TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk
Eksamen 16. des. 2013. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Rett svar:	D	B	D	C	C	E	A	E	B	D	D

Detaljer om spørsmålene:

a. D. $F_\mathrm{f} = \mu_\mathrm{k} F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{k}(mg - F\sin\theta)$. Normalkrafta blir altså mindre som følge av at F har komponent oppover. Det gjelder også at $F_\mathrm{f} = F\cos\theta$ når farta er konstant, men dette var ikke et oppgitt alternativ.

b. B. Regner farten v positiv oppover. Mer og mer negativ v til den treffer golvet, den spretter og farten inverteres men litt mindre $|v|$ pga. noe energitap i støtet. Herfra er v avtakende positiv til den når toppen, deretter negativ til den treffer golvet for andre gangen. A, C og D antar fartsretning positiv nedover som er helt greit, men kurveforløpene stemmer ikke.

c. D. $I = \Sigma mr^2$. Massen øker med faktor a^3. Avstanden r fra cm øker med faktor a og dermed r^2 med faktor a^2, slik at I øker med faktor a^5. Med eksempel i kule: $I = \frac{3}{5}MR^2$ med $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ gir oss $I \propto R^5$.

d. C. Bevaring bevegelsesmengde gir $2mv_0 = 5mv$, dvs. $v = 2v_0/5$. Energitapet er dermed $E_{\mathrm{K},0} - E_\mathrm{K} = \frac{1}{2}2mv_0^2 - \frac{1}{2}5m(2v_0/5)^2 = \frac{3}{5}mv_0^2$. Da kun ett alternativ er rett, kan A og D ikke være rett svar da de er like (!)

e. C. Mekanisk energi er bevart, så hastigheten er mindre på toppen enn ved bunnen. Dette er nok til å fastslå at C er riktig figur, siden sentripetalakselerasjonen er v^2/r. På høyre og venstre side har vi i tillegg baneakselerasjonen g retta nedover, som gir total akselerasjon på skrå nedover og inn mot midten.

f. E. De fire stavenes massesenter har lik akselerasjon når netto ytre kraft F er den samme. Kraftas angrepspunkt har ingen betydning for tyngdepunktbevegelsen: $m\vec{a}_\mathrm{cm} = \sum \vec{F} = \vec{F}$.

g. A. Langs skråplanet virker tyngdens komponent ($mg\sin\theta$, der θ er helningen på skråplanet) nedover, like stor for alle tre, samt friksjonskrafta $f_i (i = 1,2,3)$ fra underlaget, retta oppover. Nettokrafta $mg\sin\theta - f_i$ bestemmer tyngdepunktets akselerasjon, som tydeligvis har vært størst for legeme 3, og like stor for 1 og 2. Ergo er f_3 mindre enn $f_1 = f_2$.

h. E. $\vec{r}\|\vec{F}$ slik at kraftmomentet $\vec{r}\times\vec{F} = \vec{0}$.

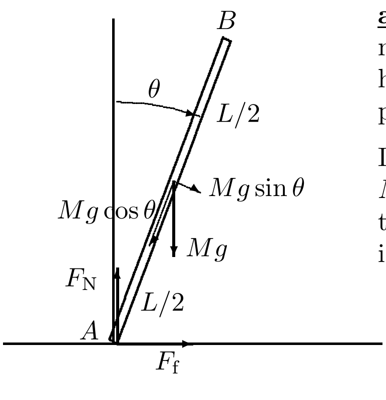
i. B. I stabil stasjonær bane er gravitasjonskraft lik sentripetalkraft: $-GmM/r^2 = -mv^2/r$. Dette gir $GmM/r = mv^2 = 2\cdot\frac{1}{2}mv^2 = 2\cdot E_\mathrm{k}$, og idet potensiell energi er gitt ved (se f.eks. formelsamling) $E_\mathrm{p} = -GmM/r$, så er altså $\underline{E_\mathrm{p}/E_\mathrm{k} = -2}$.

j. D. Fra figuren ser vi f.eks. at $x(0) = 1$ og $x(5T) = 0,5$, der $T = 2\pi/\omega$ er svingningens periode. Dermed:

$$e^{-\gamma\cdot 5T} = e^{-\gamma\cdot 5\cdot 2\pi/\omega} = 0,5 \qquad \Rightarrow \qquad 10\pi\frac{\gamma}{\omega} = \ln 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\omega}{\gamma} = 45.$$

k. D. I programmet er A $= \Delta x/\Delta t$, dvs. v_x. B $= \Delta y/\Delta t = v_y$, slik at C $= v^2$. Videre ser vi at D $= r$, og følgelig blir E $= vr$, som jo er spinnet når massen er lik 1.

Oppgave 2. Fallende stang.



a. Tyngdekrafta Mg virker i CM. I kontaktpunktet A virker normalkrafta F_N rett opp og og friksjonskrafta F_f. Antar F_f virker mot høyre, som er rett når θ er liten men ikke nærme 90°, som vi ser i pkt. d. Inntegning F_f mot venstre godkjennes også.

I figuren er inntegnet både Mg og komponentene $Mg\sin\theta$ og $Mg\cos\theta$ henholdsvis på tvers av og langs av staven. Dette viser at tyngdekrafta har et kraftmoment om A lik $Mg\sin\theta\cdot L/2$, som brukes i neste punkt.

b. Newtons 2. lov for rotasjon:

$$\tau = I\alpha \quad\Rightarrow\quad Mg\sin\theta\cdot\frac{L}{2} = \frac{1}{3}ML^2\cdot\alpha \quad\Rightarrow\quad \underline{\alpha(\theta) = \frac{g}{L}\cdot\frac{3}{2}\sin\theta\,.}$$

c. Bevegelsen kan sees på som rein rotasjon om B, slik at kin. energi er kun rotasjonsenergi $E_{\rm k}(\theta) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}ML^2\,\omega^2$. Høyden for CM er $h = \frac{1}{2}L\cos\theta$, slik at $E_{\rm p} = Mg\,\frac{1}{2}L\cos\theta$. Energien er bevart slik at $E_{\rm p}(0) + E_{\rm k}(0) = E_{\rm p}(\theta) + E_{\rm k}(\theta)$:

$$Mg\,\frac{L}{2} + 0 = Mg\,\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{1}{6}ML^2\,\omega^2 \quad\Rightarrow\quad \underline{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-\cos\theta)}}$$

Man vil kunne verifisere ved derivasjon at $\dot\omega = \alpha$, som en kontroll av svaret. Man kunne også finne $\omega(\theta)$ ved integrasjon av svarte i forrige punkt: $d\omega = \alpha dt = \alpha d\theta\cdot dt/d\theta = \alpha d\theta/\omega$ som gir $\omega d\omega = \alpha(\theta)d\theta$ som enkelt kan løses, men det var oppgitt at energibetraktning skal brukes.

d. Ved horisontal stilling $\theta = 90^\circ$ er akselerasjonen lik

$$\vec a \;=\; a_\theta\,\hat{\boldsymbol\theta} + a_r\,\hat{\mathbf r} = \frac{3g}{4}\sin 90^\circ\;\hat{\boldsymbol\theta} - \frac{3g}{2}(1-\cos 90^\circ)\;\hat{\mathbf r} = \frac{3g}{4}\;\hat{\boldsymbol\theta} - \frac{3g}{2}\;\hat{\mathbf r}\,.$$

Ved 90° er enhetsvektoren $\hat{\mathbf r} = \hat{\mathbf i}$, slik at sentripetalakselerasjonen $a_r\,\hat{\mathbf r} = -\frac{3g}{2}\;\hat{\mathbf i}$ er horisontal mot venstre. Horisontalt virker kun friksjonen, og Newton 2 horisontalt gir

$$F_{\rm f} = Ma_r = \underline{-\frac{3}{2}Mg.}$$

Friksjonskrafta virker altså mot venstre ved $\theta = 90^\circ$.

Ved 90° er $\hat{\boldsymbol\theta} = -\,\hat{\mathbf k}$, slik at tangentialakselerasjonen $a_\theta\,\hat{\boldsymbol\theta} = -\frac{3g}{4}\,\hat{\mathbf k}$ er vertikal nedover. Vertikalt virker tyngden og normalkrafta fra underlaget, og Newton 2 vertikalt gir

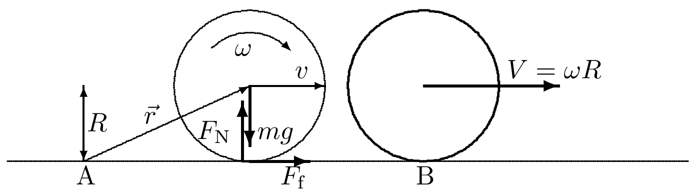
$$F_{\rm N} - Mg = -Ma_\theta = -M\frac{3g}{4} \quad\Rightarrow\quad F_{\rm N} = Mg - M\frac{3g}{4} = \underline{\frac{1}{4}Mg.}$$

Fra $F_{\rm f,max} = \mu F_{\rm N}$ ser vi at det kreves $\mu = \frac{3/2}{1/4} = 6$ minst for ikke å gli. I de aller fleste tilfeller vil stanga gli mot høyre mot slutten av fallet pga. manglende $F_{\rm f}$ mot venstre. Prøv selv!

Når a_θ og a_r er oppgitt kan du kontrollere om svarene dine i b. og c. er rett:

$$a_\theta = \alpha\frac{L}{2} = \frac{g}{L}\cdot\frac{3}{2}\sin\theta\frac{L}{2} = \frac{3g}{4}\sin\theta = \text{OK} \quad \text{og} \quad a_r = -\omega^2 r = -\frac{3g}{L}(1-\cos\theta)\frac{L}{2} = -\frac{3g}{2}(1-\cos\theta) = \text{OK}$$

Oppgave 3. Spinning, rulling og kollisjon



a. Friksjonskrafta $F_{\rm f}$ har null kraftmoment om A fordi $\vec r \| F_{\rm f}$ mens $\vec F_{\rm N} = -m\vec g$. Derfor null kraftmoment og spinnsatsen gir at L om A er bevart. Spinnet om A kan uttrykkes $L = Rmv + I_0\omega$. Spinnbevaring gir $L(v=0) = L(v=V)$ der $V = \omega R$ er hastigheten idet rulling er oppnådd:

$$\begin{aligned} I_0\omega_0 &= RMV + I_0\omega \\ \frac{1}{2}MR^2\omega_0 &= RMV + \frac{1}{2}MR^2V/R \\ \frac{1}{2}R\omega_0 &= \frac{3}{2}V \quad\Rightarrow\quad \underline{V = \frac{R\omega_0}{3}.} \end{aligned}$$

b. Friksjonskrafta er eneste krafta som virker i fartsretningen og kan gi akselerasjon a. Friksjonen er kinetisk: $F_{\rm f} = \mu F_{\rm N} = \mu Mg$, og a bestemmes:

$$a = \frac{\sum F}{M} = \frac{\mu Mg}{M} = \mu g$$

Vi bruker konstantakselerasjonslikning $V^2 - 0^2 = 2as$ til å bestemme strekningen s:

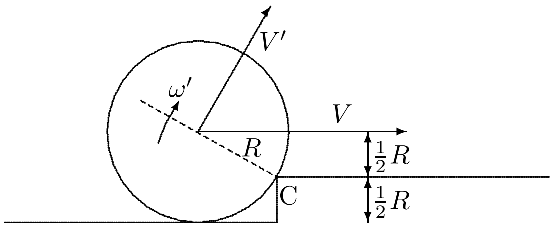
$$\underline{s = \frac{V^2}{2a} = \frac{R^2\omega_0^2}{18\,\mu g}.}$$

Dersom energibetraktning brukes må man kun inkludere translasjonens kinetiske energi: $F_\mathrm{f}\cdot s = \Delta(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{1}{2}MV^2$, som med $F_\mathrm{f} = \mu Mg$ gir samme svar som over. Husk at total bevegelse mellom sylinder og underlag er større enn s, sylinderen roterer samtidig med at den sklir slik at $s_\mathrm{tot} = s + \theta R$ og dermed $\Delta(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2) = F_\mathrm{f}\cdot s_\mathrm{tot}$.

c. Ytre krefter på sylinderen er tyngdekrafta og normalkrafta fra underlaget. Under kollisjonen som er kortvarig har ikke sylinderen løftet seg og normalkrafta = tyngdekrafta. Derfor ingen ytre krefter og derfor heller ingen kraftmomtent på sylinderen, og da er ifølge spinnsatsen sylinderens spinn om C bevart. Kontaktkrafta (kollisjonskrafta) virker i C og har heller ingen kraftmoment.

L_C før støtet:

$$L_\mathrm{C} = M\frac{R}{2}\cdot V + I_0\omega = M\frac{R}{2}\cdot V + \frac{1}{2}MR^2V/R = MRV.$$



Vi betrakter sylinderens bevegelse etter støtet som en rotasjon om punktet C (ingen translasjon). Rotasjonspunktet ligger i avstand R fra CM, slik at treghetsmomentet for denne rotasjonen ifølge Steiners sats er

$$I_\mathrm{C} = I_0 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

Spinnet om C etter støtet er derfor

$$L'_\mathrm{C} = I_\mathrm{C}\,\omega' = \frac{3}{2}MR^2\omega' = \frac{3}{2}MRV'.$$

Kan også unngå bruk av Steiners sats ved å bruke

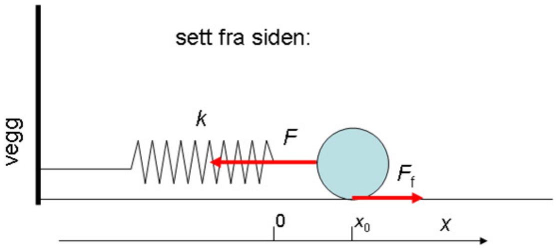
$$L'_\mathrm{C} = I_0\omega' + MRV' = \frac{1}{2}MR^2\frac{V'}{R} + MRV' = \frac{3}{2}MRV'.$$

$L_\mathrm{C} = L'_\mathrm{C}$ gir endelig

$$MRV = \frac{3}{2}MRV' \qquad \Rightarrow \qquad \underline{x = \frac{V'}{V} = \frac{2}{3}}.$$

Oppgave 4. Svingesystem

a. Fjærkrafta virker mot venstre. I ytterpunktet står kulene et øyeblikk i ro, og for at kulene etter å ha passert ytterpunktet skal rotere mot klokka, må friksjonskrafta F_f ha retning mot høyre. F_f virker i kontaktpunktet mot underlaget. F må være større enn F_f for at kula skal få translasjonsakselerasjon mot venstre. Vi antar da at F_f er den totale friksjonskrafta på de to kulene.



b. Med rotasjonsakselerasjon α og translasjonsakselerasjon a er betingelsen $a = \alpha R$ for rein rulling oppfylt. F_f er stor nok til at grensa $F_\mathrm{f,max} = \mu_s Mg$ ikke er nådd. Newton 2 for rotasjon:

$$\tau = F_\mathrm{f}R = I\alpha = I\frac{a}{R}\,.$$

Treghetsmomentet for ei kule fra formelark, og for de to kulene får vi $I = 2\cdot\frac{2}{5}\frac{M}{2}R^2 = \frac{2}{5}MR^2$. Dette gir

$$F_\mathrm{f}R = \frac{2}{5}MR^2\frac{a}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{F_\mathrm{f} = \frac{2}{5}Ma}\,.$$

c. Med F_f mot høyre som vist i figuren over og fjærkraft mot venstre, blir Newton 2 for translasjonen

$$Ma = -kx + F_\mathrm{f}\,.$$

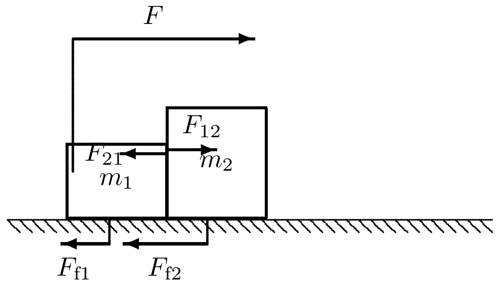
Nå er i størrelse $F_\mathrm{f} = \frac{2}{5}Ma$, men i høyre ytterstilling er a negativ og F_f mot høyre (positiv), slik at vi må sette inn $F_\mathrm{f} = -\frac{2}{5}Ma$. Dette gir

$$M\ddot{x} = -kx - \frac{2}{5}M\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{7}{5}M\ddot{x} + kx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\ddot{x} + \frac{5}{7}\frac{k}{M}x = 0},$$

som vi gjenkjenner som en harmonisk oscillasjon med $\omega = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{k}{M}}$ og svingetid

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{7M}{5k}} = 2\pi\sqrt{\frac{7\cdot 2,00\,\mathrm{kg}}{5\cdot 200\,\mathrm{kg/s^2}}} = 0,743\,\mathrm{s} = \underline{0,74\,\mathrm{s}}.$$

Oppgave 5. Diverse



a. Figuren til høyre viser alle krefter. Vi skal beregne F_{12}, som er lik F_{21} men motsatt retta.
Hvis klossene beveger seg er friksjonskreftene:
$F_{f1} = 0,30 \cdot m_1 g = 3,0\,\mathrm{N}$, $\quad F_{f2} = 0,30 \cdot m_2 g = 6,0\,\mathrm{N}$,
der vi har brukt $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

Newton 2 på kloss 1 og 2 samla viser at klossene beveger seg, med

$$a = \frac{\sum F}{m_1 + m_2} = \frac{F - F_{f1} - F_{f2}}{m_1 + m_2} = \frac{(12,0 - 3,0 - 6,0)\,\mathrm{N}}{3,00\,\mathrm{kg}} = 1,00\,\mathrm{m/s^2}\,. \tag{1}$$

Newton 2 på kloss 2 gir:

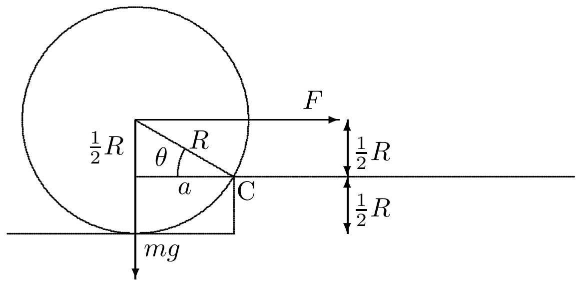
$$m_2 a = F_{12} - F_{f2} \quad \Rightarrow \quad F_{12} = m_2 a + F_{f2} = 2,0\,\mathrm{kg} \cdot 1,00\,\mathrm{m/s^2} + 6,0\,\mathrm{N} = \underline{8,0\,\mathrm{N}}. \tag{2}$$

Kontaktkrafta F_{12} blir 8,0 N uavhengig friksjonen, så lenge klossene beveger seg. Dette kan vi beregne litt mer generelt ved å bruke symboler og ikke sette inn tallverdier underveis. Med $F_{f1} = \mu m_1 g$ og $F_{f2} = \mu m_2 g$ i likn. (1):

$$a = \frac{F - F_{f1} - F_{f2}}{m_1 + m_2} = \frac{F - \mu m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2}. \tag{3}$$

Newton 2 på kloss 2 som i i likn. (2) gir

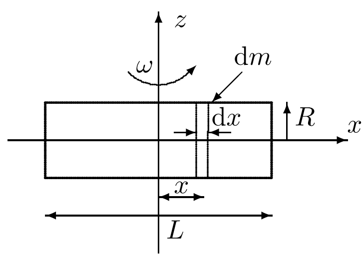
$$\begin{aligned} F_{12} &= m_2 \frac{F - \mu m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2} + \mu m_2 g \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(F - \mu m_1 g - \mu m_2 g + (m_1 + m_2)\mu g\right) = \underline{\frac{m_2}{m_1 + m_2} F} = \frac{2}{3} \cdot 12,0\,\mathrm{N} = \underline{8,0\,\mathrm{N}}. \end{aligned}$$



b. Sum av kraftmoment om enhver akse (referansepunkt) er lik null. Det er gunstig å velge akse ved kontaktpunktet C, da trenger vi ikke vite kontaktkrafta i dette punktet. Det er angitt i oppgavefiguren at F er horisontal. Figuren til høyre viser da at F har effektiv arm $R/2$ og Mg har effektiv arm $a = R\sqrt{3}/2$ (f.eks. ved Pythagoras eller beregne at $\theta = 30\,°$). Momentet fra trekkrafta F må akkurat overvinne momentet fra tyngdekrafta:

$$F\frac{R}{2} = Mg\frac{R\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{F = \sqrt{3}Mg.}$$

Når sylinderen løftes litt opp får F større effektiv arm og mg mindre effektiv arm, slik at den løftes videre opp av den bestemte F uten problem. Hvis vi skulle bestemme kontaktkrafta i C måtte vi i tillegg bruke $\sum F_x = 0$ og $\sum F_z = 0$.



c. Legger sylinderen med x-akse langs symmetriaksen og z-aksen lik rotasjonsaksen. Velger infinitesimal bit = skive normal på x-aksen med tykkelse $\mathrm{d}x$, radius R og masse $\mathrm{d}m = M\frac{\mathrm{d}x}{L}$. Hver bit har da treghetsmoment om en diagonal (eller bedre: diameter) lik $\mathrm{d}I_0 = \frac{1}{4}\mathrm{d}mR^2$ (oppgitt). Når denne skiva er plassert ved x gir Steiners sats at treghetsmomentet mhp. en akse gjennom origo (parallell med diameteren i avstand x) er

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}I_0 + x^2\mathrm{d}m = \frac{1}{4}\mathrm{d}mR^2 + x^2\mathrm{d}m = \frac{M}{L}\left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)\mathrm{d}x.$$

Integrasjon av alle bitene gir

$$I = 2\int_0^{L/2} \mathrm{d}I = 2\frac{M}{L}\int_0^{L/2}\left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{M}{L/2}\left[\frac{1}{4}R^2 x + \frac{1}{3}x^3\right]_0^{L/2} = \underline{\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2}.$$

I svaret gjenkjenner vi $\frac{1}{12}ML^2$ som I for en lang tynn stav og $\frac{1}{4}MR^2$ som korreksjonen pga. ikke uendelig tynn men radius R. "Tilfeldigvis" er denne korreksjonen lik oppgitt $\frac{1}{4}MR^2$ for skive om diameter, men det blir ikke rett å bruke Steiners sats i sluttsvaret på denne måten: $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ fordi det er ingen parallelle akser å betrakte her.

A Mikkelsen 3. jan. 2014