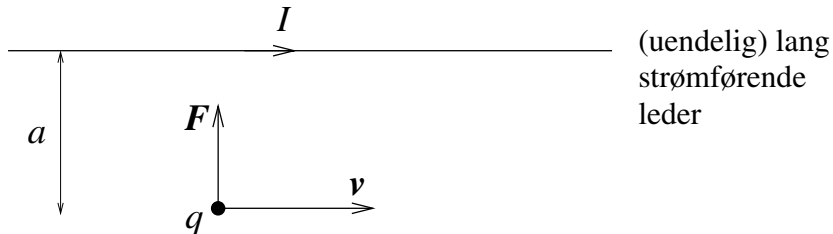


Notat 3: Magnetfelt og magnetisme som relativistisk fenomen

(orienteringsstoff; ikke pensum til eksamen)

Utgangspunkt: Anta at vi kjenner til Coulombs lov og elektriske krefter. Vi vet derimot *ingenting* om magnetfelt og magnetisme. (Ikke så ulikt vår situasjon nå.)

Vi gjør så et eksperiment:



... og måler til vår store overraskelse en kraft på ladningen q :

$$F = k \frac{I}{a} qv$$

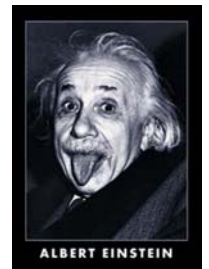
med retning inn mot lederen dersom $q > 0$.

(Retning vekk fra lederen dersom q , I eller v skifter fortegn.)

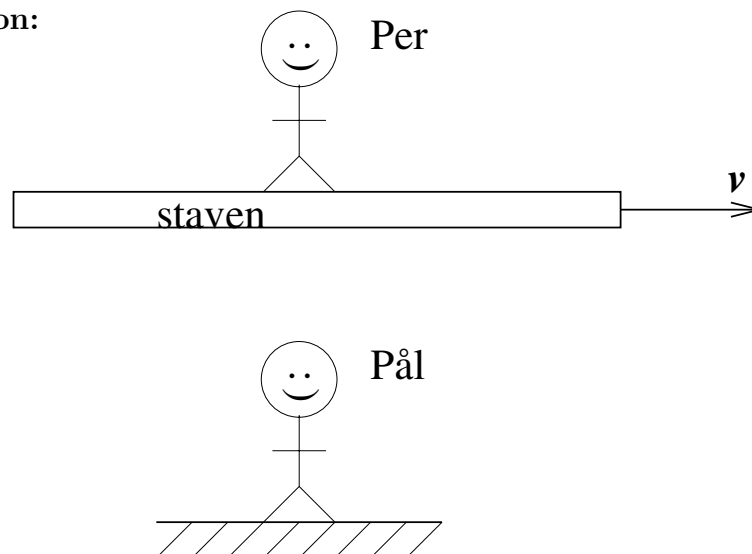
Lederen er *elektrisk nøytral* \Rightarrow den elektriske kraften må være *null*!

HVOR KOMMER KRAFTEN F FRA??

Løsning: Relativitetsteori!



Lorentzkontraksjon:



Per: Stavens lengde er L .

Pål: Stavens lengde er $L/\gamma < L$.

Her er:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1$$

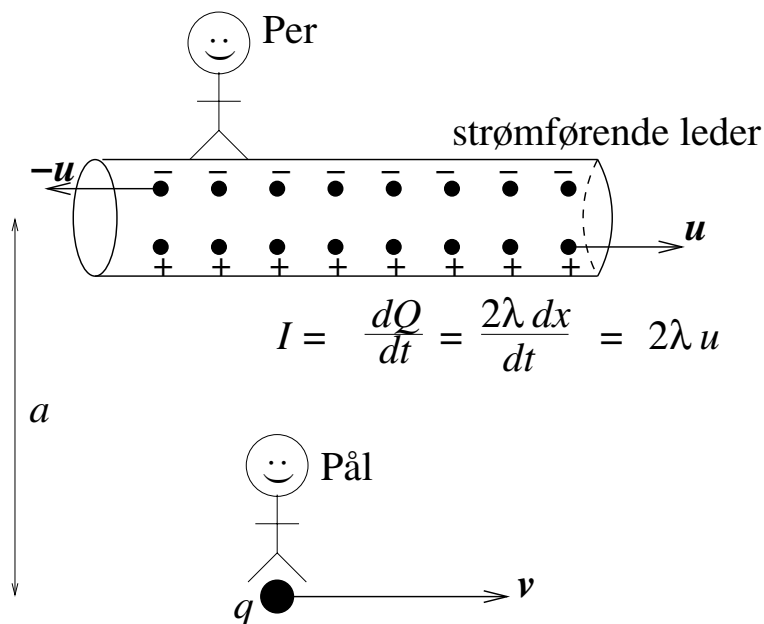
med $c =$ lyshastigheten ($= 299792458 \text{ m/s} \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$) og $v =$ hastigheten til staven og Per (i stavens lengderetning) i forhold til Pål.

Eksempel: Per er i ro i forhold til staven og måler dens lengde til 1 m. Pål ser en stav som har en hastighet $v = 30000 \text{ km/s}$. Da er $v^2/c^2 = 10^{-2}$ og Pål vil si at stavens lengde er 0.995 m, dvs 5 mm kortere.

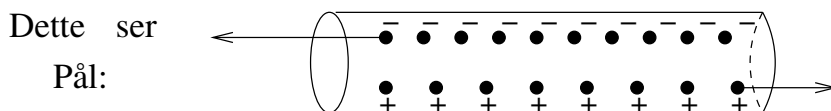
Altså:

Objekter i bevegelse er kortere enn når de er i ro!

Konsekvenser av Lorentzkontraksjon for ladningen q som er i bevegelse langs den strømførende lederen:



Per: Lederen har negativ ladning $-\lambda$ pr lengdeenhet og positiv ladning λ pr lengdeenhet. Alt i alt er lederen *elektrisk nøytral*.



Pål: Lederen har negativ ladning $-\lambda_-$ per lengdeenhet og positiv ladning λ_+ pr lengdeenhet. De negative ladningene har *størst* hastighet i forhold til meg. På grunn av *størst* Lorentzkontraksjon ligger derfor disse *tettere* enn de positive ladningene. Altså er $\lambda_- > \lambda_+$. Alt i alt er lederen *ikke elektrisk nøytral*; den har en *netto negativ ladning* $\Delta\lambda = -\lambda_- + \lambda_+ < 0$.

Dermed måler Pål en *tiltrekkende elektrisk kraft* på ladningen q :

$$F_{\text{Pål}} = F_e = qE = q \cdot \frac{\Delta\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

der vi har brukt at elektrisk felt i avstand a fra en uendelig lang stav med ladning $\Delta\lambda$ pr lengdeenhet er (se øving 2, oppgave 3d og øving 5, oppgave 2) $E = \Delta\lambda/2\pi\epsilon_0 a$

So what? *Vi* er typisk i Pers situasjon, dvs på laben, i ro i forhold til lederen, og hvem har sagt at Per, som ser en nøytral leder, vil måle en kraft på q ?

Jo, det sier Einstein, med sitt *relativitetsprinsipp*:

Fysikkens lover gjelder i alle *inertialsystemer*, dvs i alle referansesystemer som er i ro eller i konstant hastighet.

Dermed: Hvis Pål måler en kraft på q , må også Per måle en kraft på q !

I forelesningene tok vi her rett og slett en snarvei og konstaterte at

$$F_{\text{Per}} = \sqrt{1 - v^2/c^2} F_{\text{Pål}}$$

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda v u}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Den første av disse to ligningene skal vi ikke forsøke å utlede, men den uttrykker altså hvordan krefter, ifølge relativitetsteorien, *transformerer* mellom ulike referansesystemer som er i relativ bevegelse med hastighet \mathbf{v} . I vårt tilfelle er ladningen q i ro i Pål sitt referansesystem, i Per sitt referansesystem har den hastighet \mathbf{v} (mot høyre). Hvis da Pål måler en kraft

$$\mathbf{F}_{\text{Pål}} = \mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\parallel} + \mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\perp}$$

der $\mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\parallel}$ er komponenten av $\mathbf{F}_{\text{Pål}}$ parallelt med hastighetsvektoren \mathbf{v} og $\mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\perp}$ er komponenten av $\mathbf{F}_{\text{Pål}}$ normalt på hastighetsvektoren \mathbf{v} , så “kan det vises” at Per vil måle en kraft

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{Per}} &= \mathbf{F}_{\text{Per}}^{\parallel} + \mathbf{F}_{\text{Per}}^{\perp} \\ &= \mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\parallel} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\perp} \end{aligned}$$

Med andre ord, en eventuell kraftkomponent parallelt med \mathbf{v} blir den samme i de to referansesystemene (i vårt tilfelle er $F^{\parallel} = 0$), mens for kraftkomponenten normalt på \mathbf{v} (og vår kraft er nettopp normalt på \mathbf{v}) har vi

$$\mathbf{F}_{\text{Per}}^{\perp} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\perp} = \sqrt{1 - v^2/c^2} F_{\text{Pål}}$$

som konstatert ovenfor.

Den andre av de to ligningene ovenfor kan vi utlede på bakgrunn av **Einsteins regel for addisjon av relative hastigheter**.

La oss ta for oss 3 objekter A , B og C . Dersom v_{AB} er hastigheten til A relativt B og v_{BC} er hastigheten til B relativt C , da ville en nok intuitivt tenke som Galilei og si at

$$v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$$

må bli hastigheten til A relativt C . Tro det eller ei, men dette er faktisk ikke riktig! Og problemet oppstår i forbindelse med Einsteins 2. postulat (det 1. postulatet var relativitetsprinsippet, se ovenfor):

Lyshastigheten c i vakuum er konstant, uavhengig av kildens eller observatørens relative hastighet.

Nå ser du problemet med Galileis addisjonsformel: Dersom $v_{AB} = c$ (dvs A er et lyssignal som beveger seg med hastighet c i forhold til B), blir $v_{AC} \neq c$ (dvs C vil påstå at hastigheten til lyssignalet A ikke er lik c)!!

Løsningen har vi med Einsteins addisjonsregel:

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB} \cdot v_{BC}/c^2}$$

Setter du nå $v_{AB} = c$, vil du også finne at $v_{AC} = c$, i samsvar med postulatet ovenfor.

Utstyrt med denne formelen kan vi nå regne ut hvor stor Lorentzkontraksjon ladningen q ser for henholdsvis de positive og de negative ladingbærerne i den strømførende lederen.

Lederladningenes hastighet målt av Pål:

$$u_{\pm} = \frac{\pm u + (-v)}{1 + (\pm u) \cdot (-v)/c^2} = \pm \frac{u \mp v}{1 \mp uv/c^2}$$

Her er lederladningene objekt A (øvre fortegn for de positive), Pål og ladningen q er objekt C , mens Per tilsvarende objekt B . Dermed er $v_{AC} = u_{\pm} =$ lederladningenes hastighet relativt Pål og q , $v_{AB} = \pm u =$ lederladningenes

hastighet relativt Per (dvs laboratoriet, der lederen ligger i ro), mens $v_{BC} = -v = \text{Pers}$ (og laboratoriets) hastighet relativt Pål (og ladningen q).

Da kan vi regne ut "Lorentzkontraksjonsfaktorene" γ_{\pm} for de positive (øvre fortegn) og de negative (nedre fortegn) lederladningene, sett fra Pål og q sitt referansesystem:

$$\begin{aligned}\gamma_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{1 - u_{\pm}^2/c^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(u \mp v)^2}{(1 \mp uv/c^2)^2 c^2}}} \\ &= \frac{1 \mp uv/c^2}{\sqrt{(1 \mp uv/c^2)^2 - (u \mp v)^2/c^2}} \\ &= \frac{1 \mp uv/c^2}{\sqrt{1 \mp 2uv/c^2 + u^2v^2/c^4 - u^2/c^2 - v^2/c^2 \pm 2uv/c^2}} \\ &= \frac{1 \mp uv/c^2}{\sqrt{(1 - u^2/c^2) \cdot (1 - v^2/c^2)}}\end{aligned}$$

Dette gjør oss i stand til å regne ut tettheten av lederladninger, observert fra Pål og q sitt referansesystem:

$$\lambda_{\pm} = \gamma_{\pm} \lambda_0$$

der (NB!) λ_0 er (antalls-)tettheten av lederladninger *målt av lederladningene selv*. Per, i ro i laboratoriet, måler antallstettheten λ for lederladningene. Ettersom disse har hastigheten u relativt Per, blir sammenhengen mellom λ og λ_0

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \lambda_0 \quad (> \lambda_0)$$

Dvs like stor Lorentzkontraksjon for positive og negative lederladninger, sett fra Pers ståsted. (Sagt på en annen måte: Fordi Per måler like stor antallstetthet for positive og negative lederladninger, og dermed en elektrisk nøytral leder, og samtidig like stor hastighet (\pm) u , betyr det at lederladningene selv også må måle en like stor antallstetthet λ_0 , enten de nå er av det positive eller negative slaget.)

Tilbake til Pål og q , som nå altså ikke observerer en elektrisk nøytral leder, men derimot en ladet leder med ladning pr lengdeenhet

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda_+ - \lambda_- \\ &= \gamma_+ \lambda_0 - \gamma_- \lambda_0 \\ &= (\gamma_+ - \gamma_-) \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2} \lambda \\ &= \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2} \lambda}{\sqrt{(1 - u^2/c^2) \cdot (1 - v^2/c^2)}} \cdot \left[1 - \frac{uv}{c^2} - \left(1 + \frac{uv}{c^2} \right) \right] \\ &= -\frac{2\lambda v u}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}$$

Det negative fortegnet innebærer at Pål ser en *negativt* ladet leder, noe vi allerede fant ut på side 3. Nå har vi i tillegg altså regnet ut *hvor mye* negativ ladning Pål ser på lederen.

Dermed kjenner vi elektrisk kraft målt av Pål (side 3), hvoretter vi kan regne ut magnetisk kraft målt av Per, dvs i laboratoriet:

$$\begin{aligned}F_{\text{Per}} = F_m &= \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot q \cdot \frac{2\lambda v u}{2\pi\epsilon_0 a c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= qv \frac{2\lambda u}{2\pi\epsilon_0 c^2 a} \\ &= qv \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 a}\end{aligned}$$

= *magnetisk kraft* fra strømførende leder på ladning q i avstand a og med hastighet v langs lederen.

Dvs: Som vårt eksperiment, med

$$k = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2}$$

(dvs en naturkonstant)

La oss skrive

$$F_{\text{Per}} = F_m = qvB$$

med

$$B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 a}$$

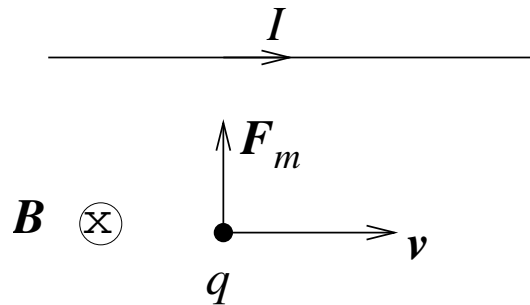
Størrelsen B er nettopp *magnetfeltet* (her: i avstand a fra en lang, rett strømførende leder med strøm I), og F_m er den *magnetiske kraften* på ladningen q med hastighet v .

Merk at vi har fått oppklart to viktige spørsmål:

- Hvor kommer magnetfeltet fra?
Svar: Fra ladninger i bevegelse, dvs *elektrisk strøm*.
- Hvordan virker den magnetiske kraften på en ladning i bevegelse?
Svar: $F_m = qvB$

Men hvordan uttrykke $F_m = qvB$ på *vektorform*? Både \mathbf{F}_m og \mathbf{v} er jo vektorer, men ikke parallelle vektorer....

Vi må ty til *kryssprodukt*! La \mathbf{B} være en vektor som peker inn i planet:



Da ser vi at vi kan skrive:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

KONKLUSJON:

Fra før: Elektrisk felt \mathbf{E} lages av ladninger (i ro eller i bevegelse) og resulterer i elektrisk kraft på ladninger (i ro eller i bevegelse):

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$$

Nå: Magnetfelt \mathbf{B} lages av strøm (dvs ladninger i bevegelse) og resulterer i magnetisk kraft på ladninger i bevegelse:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Med både \mathbf{E} og \mathbf{B} til stede samtidig, påvirkes ladningen q med hastighet \mathbf{v} av *Lorentzkraften*

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

