Institutt for fysikk 2011 **TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme**

Notat 4: Maxwells likninger (elmagen i et nøtteskall)

Læreboka (Young & Friedman = Y&F) presenterer kun Maxwells likninger på integralform (kap. 29.7 og 32.1), differensialformen utelates helt. I Lillestøl, Hunderi og Lien presenteres derimot begge former (oppsummert i kap. 28.1). Dere har god bakgrunn i vektoranalyse og differensiallikninger fra matematikken, derfor er det ingen grunn til å utelate differensialformen av likningene. Og Maxwells likninger på differensialform summerer hele innholdet i klassisk elektrodynamikk. Alle basissammenhenger er innebygget her, som Coulombs lov, Biot-Savarts lov og Faradays lov. A.Mikkelsen 17. mars 2011.

La oss ta utgangspunkt i Maxwells likninger på integralform som de er gitt i Y&F, likninger (29.18)-(29.21). **Disse gjelder i vakuum (permittivitet ϵ_0 og permeabilitet μ_0):**

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \text{(Gauss' lov for } \vec{E}) \tag{1}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \qquad \text{(Gauss' lov for } \vec{B}) \tag{2}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \qquad \text{(Amperes lov)} \tag{3}$$

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \qquad \text{(Faradays lov).} \tag{4}$$

Ved bruk av divergensteoremet og Stokes' teorem vil man kunne skrive (1)-(4) på differensialform (punktform):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{6}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{7}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,. \tag{8}$$

Vi har da brukt definisjonene for henholdsvis Φ_E (fluksen til $\vec{E}$), Φ_B (fluksen til $\vec{B}$) og strømtettheten $\vec{J}$:

$$\Phi_E = \int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} \tag{9}$$

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{A} \tag{10}$$

$$I = \int \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{A}\,. \tag{11}$$

Maxwells likninger beskriver hvordan felter produseres: Elektriske felt kommer enten fra ladninger – beskrevet av (1) eller (5), eller fra endring i magnetisk felt – beskrevet av (4) eller (8). Magnetiske felt kommer enten fra strømmer inkludert i første ledd i likn. (3) eller (7) eller fra endring i elektrisk felt, inkludert i siste ledd i likn. (3) eller (7). Likn. (2) eller (6) beskriver at det ikke finnes magnetiske "ladninger" (monopoler).

De eneste likningene vi trenger i tillegg er Lorentzkrafta

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\,, \tag{12}$$

som beskriver hvordan elektriske og magnetiske felt virker på ladninger, samt Ohms lov

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}, \tag{13}$$

som beskriver hvor stor strøm det blir i et materiale med konduktivitet $\sigma = 1/\rho$ (ρ er resistiviteten) når det er påtrykt et elektrisk felt $\vec{E}$.

Det er i Maxwells likninger en vakker symmetri mellom $\vec{B}$ og $\vec{E}$, særlig når ladning og strøm er null, som vi vil se til slutt i dette notatet.

Maxwells likninger på formen (1)-(4) og (5)-(8) ovenfor er på ett vis rett også når vi ikke har vakuum. Men det forutsettes da at Q og ρ omfatter *total* ladning, dvs. fri + indusert(bunden) ladning. Dette er uhensiktsmessig, og innenfor materialer (dielektriske og magnetiske) skrives derfor likningene på en annen måte med andre vektorfelt:

I dielektrika får vi elektrisk polarisering $\vec{P}$, som er forklart nærmere i Notat 1. Vi har der definert vektorfeltet elektrisk flukstetthet $\vec{D}$ (også kalt elektrisk forskyvning):

$$\vec{D} \;=\; \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\,. \tag{14}$$

Tilsvarende får vi i ferromagnetiske materialer magnetisk polarisering, kalt magnetisering $\vec{M}$, som forklart i Notat 2. Den magnetiske flukstetthet $\vec{B}$ som vi har brukt i Maxwells likninger over inkluderer også magnetiseringen, og den delen av magnetfeltet som bare skyldes strømmer eller tidsendring i E-felt, kaller vi magnetisk feltstyrke, $\vec{H}$:

$$\vec{B} \;=\; \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}\,. \tag{15}$$

I materialer som ikke har magnetisering er $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Maxwells likninger som gjelder i alle materialer og uttrykt med vektorfeltene $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ og $\vec{B}$ (som definert i likningene (14) og (15)) vil på integral- og differensialform lyde

$$\oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \;=\; Q \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} \;=\; \rho \tag{16}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \;=\; 0 \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} \;=\; 0 \tag{17}$$

$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \;=\; I + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} \;=\; \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{18}$$

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \;=\; -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} \qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} \;=\; -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,, \tag{19}$$

der elektrisk fluks er

$$\Phi \;=\; \int \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A}\,. \tag{20}$$

Ulempen med likningene (16)-(19) er at vi har "hybrid" notasjon; vi må forholde oss til flere felter: $\vec{E}$ og $\vec{D}$, $\vec{H}$ og $\vec{B}$. De aller fleste media – og alle aktuelle i dette fysikkurset – er elektromagnetisk sett **lineære og isotrope**. Det betyr at polariseringen $\vec{P}$ øker proporsjonalt (lineært) med $\vec{E}$ og er parallell med denne, og at magnetiseringen $\vec{M}$ øker proporsjonalt (lineært) med $\vec{H}$ og er parallell med denne:

$$\vec{P} = \chi_{\mathrm{e}}\epsilon_0 \vec{E}\,, \tag{21}$$

$$\vec{M} = \chi_{\mathrm{m}} \vec{H}\,. \tag{22}$$

Da er (som også beskrevet i Notat 1 og 2):

$$\vec{D} \;=\; \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\vec{E} + \chi_{\mathrm{e}}\epsilon_0\vec{E} = (1+\chi_{\mathrm{e}})\epsilon_0\vec{E} = \epsilon_{\mathrm{r}}\epsilon_0\vec{E} = \epsilon\vec{E} \tag{23}$$

$$\vec{B} \;=\; \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu_0\vec{H} + \chi_{\mathrm{m}}\mu_0\vec{E} = (1+\chi_{\mathrm{m}})\mu_0\vec{H} = \mu_{\mathrm{r}}\mu_0\vec{H} = \mu\vec{H} \tag{24}$$

der definisjonen av relativ permittivitet ϵ_{r} og relativ permeabilitet μ_{r} framkommer.

Dermed har vi kun to vektorfelt å forholde oss til; f.eks. bare $\vec{E}$ og $\vec{B}$ mens $\vec{D}$ og $\vec{H}$ ikke inngår. Men før vi skriver dem opp, la oss også anta at vi har **homogene medier**, dvs. at μ og ϵ ikke varierer fra punkt til punkt.[1] Da kan disse settes utenfor integral-, derivasjons- og nablategn. For det første finner vi da fra likningene (9) og (20) at $\Phi = \epsilon\cdot\Phi_E$. **For lineære, isotrope og homogene media** vil da likningene (16)-(19) forenkles til følgende Maxwells likninger:

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \;=\; \frac{Q}{\epsilon} \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} \;=\; \frac{\rho}{\epsilon} \tag{25}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \;=\; 0 \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} \;=\; 0 \tag{26}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \;=\; \mu I + \mu\epsilon\frac{\partial\Phi_E}{\partial t} \qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} \;=\; \mu\vec{J} + \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{27}$$

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \;=\; -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} \qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} \;=\; -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,. \tag{28}$$

Ved sammenlikning ser vi nå at de første Maxwells likninger som gjelder for vakuum (1)-(8) er identisk med disse siste likningene, bare at ϵ_0 og μ_0 er erstatta av henholdsvis ϵ og μ!

[1]NB: For magnetiske materialer har vi ofte at μ er homogen, men avhengig av magnetfeltet $\vec{B}$.

Hvis vi kun studerer **statisk tilfelle (ingen tidsvariasjon)** vil likningene (25)-(28) forenkles til

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \tag{29}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{30}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu I \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\vec{J} \tag{31}$$

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0\,. \tag{32}$$

Vi ser at $\vec{B}$ og $\vec{E}$ er fullstendig dekopla. Stasjonære ladninger bestemmer E-feltet (elektrostatikk) og stasjonær strøm bestemmer B-feltet (magnetostatikk).

Til slutt: Hvis vi tar med tidsvariasjoner men ser på **områder hvor vi ikke har ladninger eller strømmer** vil likningene (25)-(28) reduseres til følgende likninger[2]

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \tag{33}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{34}$$

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu\epsilon\frac{\partial\Phi_E}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{35}$$

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,. \tag{36}$$

Merk at vi her finner perfekt symmetri mellom $\mu\epsilon\vec{E}$ og $-\vec{B}$! Når enten et E-felt eller et B-felt endrer seg med tida blir det andre feltet indusert. Likningene (33)-(36) på differensialform er de likningene som beskriver elektromagnetiske bølger.

Symmetrien hadde vært fullkommen også i Maxwells likninger med ladning ($\rho \neq 0$) dersom det fantes “magnetisk ladning” (magnetiske monopoler) – så en kan skjønne hvorfor fysikere i alle år har lett etter magnetiske monopoler!

Den vidtrekkende betydning og inntrykksfulle skjønnhet i Maxwells likninger fikk den store fysiker Boltzmann til å uttrykke “War es ein Gott der diese Zahlen schrieb......”

[2] Ladnings- og strømfritt er mest aktuelt for vakuum, slik at vi kunne brukt μ_0 og ϵ_0.