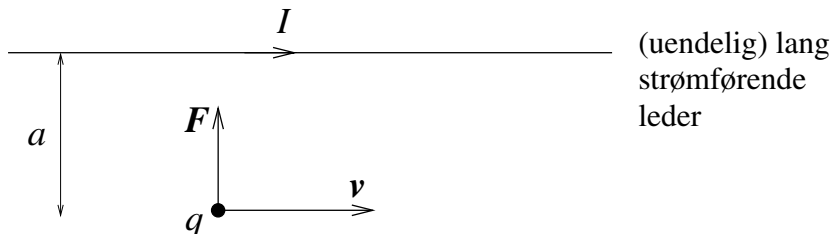


# Notat 3: Magnetfelt og magnetisme som relativistisk fenomen

(orienteringsstoff; ikke pensum til eksamen)

Utgangspunkt: Anta at vi kjenner til Coulombs lov og elektriske krefter. Vi vet derimot *ingenting* om magnetfelt og magnetisme. (Ikke så ulikt vår situasjon nå.)

Vi gjør så et eksperiment:



... og måler til vår store overraskelse en kraft på ladningen  $q$ :

$$F = k \frac{I}{a} qv$$

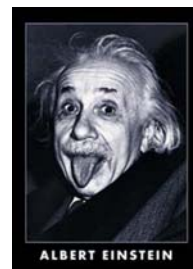
med retning inn mot lederen dersom  $q > 0$ .

(Retning vekk fra lederen dersom  $q$ ,  $I$  eller  $v$  skifter fortegn.)

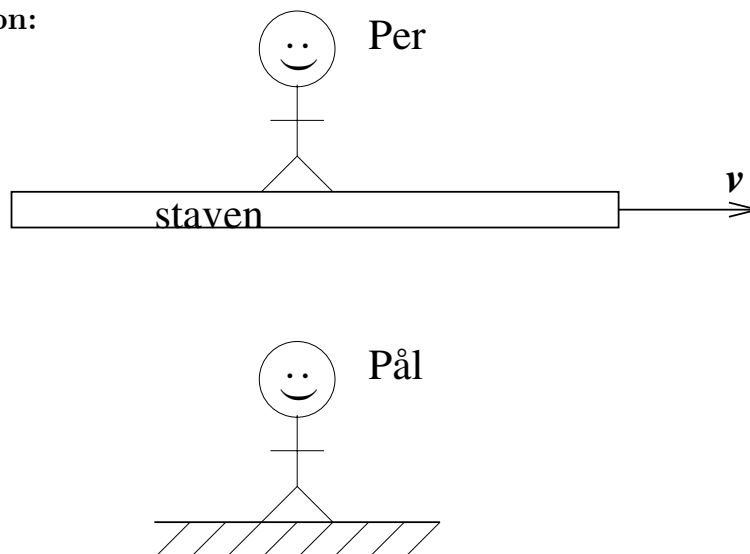
Lederen er *elektrisk nøytral*  $\Rightarrow$  den elektriske kraften må være *null*!

HVOR KOMMER KRAFTEN  $F$  FRA??

Løsning: Relativitetsteori!



**Lorentzkontraksjon:**



*Per*: Stavens lengde er  $L$ .

*Pål*: Stavens lengde er  $L/\gamma < L$ .

Her er:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1$$

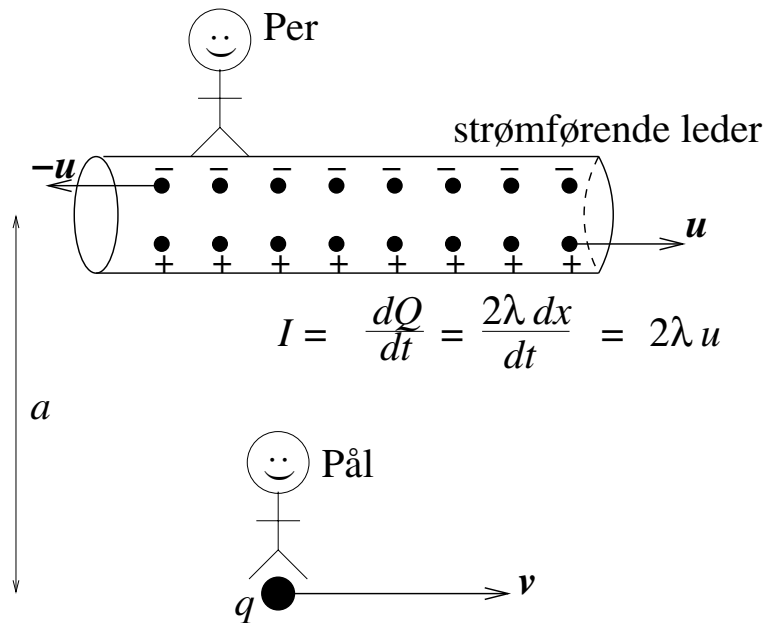
med  $c =$  lyshastigheten ( $= 299792458 \text{ m/s} \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ) og  $v =$  hastigheten til staven og Per (i stavens lengderetning) i forhold til Pål.

Eksempel: Per er i ro i forhold til staven og måler dens lengde til 1 m. Pål ser en stav som har en hastighet  $v = 30000 \text{ km/s}$ . Da er  $v^2/c^2 = 10^{-2}$  og Pål vil si at stavens lengde er 0.995 m, dvs 5 mm kortere.

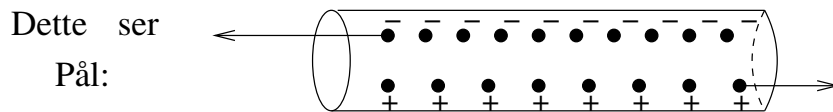
Altså:

Objekter i bevegelse er kortere enn når de er i ro!

Konsekvenser av Lorentzkontraksjon for ladningen  $q$  som er i bevegelse langs den strømførende lederen:



*Per:* Lederen har negativ ladning  $-\lambda$  pr lengdeenhet og positiv ladning  $\lambda$  pr lengdeenhet. Alt i alt er lederen *elektrisk nøytral*.



*Pål:* Lederen har negativ ladning  $-\lambda_-$  per lengdeenhet og positiv ladning  $\lambda_+$  pr lengdeenhet. De negative ladningene har *størst* hastighet i forhold til meg. På grunn av *størst* Lorentzkontraksjon ligger derfor disse *tettere* enn de positive ladningene. Altså er  $\lambda_- > \lambda_+$ . Alt i alt er lederen *ikke elektrisk nøytral*; den har en *netto negativ ladning*  $\Delta\lambda = -\lambda_- + \lambda_+ < 0$ .

Dermed måler Pål en *tiltrekkende elektrisk kraft* på ladningen  $q$ :

$$F_{\text{Pål}} = F_e = qE = q \cdot \frac{\Delta\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

der vi har brukt at elektrisk felt i avstand  $a$  fra en uendelig lang stav med ladning  $\Delta\lambda$  pr lengdeenhet er (se øving 2, oppgave 3d og øving 5, oppgave 2)  $E = \Delta\lambda/2\pi\epsilon_0 a$

So what? *Vi* er typisk i Pers situasjon, dvs på laben, i ro i forhold til lederen, og hvem har sagt at Per, som ser en nøytral leder, vil måle en kraft på  $q$ ?

Jo, det sier Einstein, med sitt *relativitetsprinsipp*:

Fysikkens lover gjelder i alle *inertialsystemer*, dvs i alle referansesystemer som er i ro eller i konstant hastighet.

Dermed: Hvis Pål måler en kraft på  $q$ , må også Per måle en kraft på  $q$ !

I forelesningene tok vi her rett og slett en snarvei og konstaterte at

$$F_{\text{Per}} = \sqrt{1 - v^2/c^2} F_{\text{Pål}}$$

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda v u}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Den første av disse to ligningene skal vi ikke forsøke å utlede, men den uttrykker altså hvordan krefter, ifølge relativitetsteorien, *transformerer* mellom ulike referansesystemer som er i relativ bevegelse med hastighet  $\mathbf{v}$ . I vårt tilfelle er ladningen  $q$  i ro i Pål sitt referansesystem, i Per sitt referansesystem har den hastighet  $\mathbf{v}$  (mot høyre). Hvis da Pål måler en kraft

$$\mathbf{F}_{\text{Pål}} = \mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\parallel} + \mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\perp}$$

der  $\mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\parallel}$  er komponenten av  $\mathbf{F}_{\text{Pål}}$  parallelt med hastighetsvektoren  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\perp}$  er komponenten av  $\mathbf{F}_{\text{Pål}}$  normalt på hastighetsvektoren  $\mathbf{v}$ , så “kan det vises” at Per vil måle en kraft

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{Per}} &= \mathbf{F}_{\text{Per}}^{\parallel} + \mathbf{F}_{\text{Per}}^{\perp} \\ &= \mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\parallel} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\perp} \end{aligned}$$

Med andre ord, en eventuell kraftkomponent parallelt med  $\mathbf{v}$  blir den samme i de to referansesystemene (i vårt tilfelle er  $F^{\parallel} = 0$ ), mens for kraftkomponenten normalt på  $\mathbf{v}$  (og vår kraft er nettopp normalt på  $\mathbf{v}$ ) har vi

$$\mathbf{F}_{\text{Per}}^{\perp} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}_{\text{Pål}}^{\perp} = \sqrt{1 - v^2/c^2} F_{\text{Pål}}$$

som konstatert ovenfor.

Den andre av de to ligningene ovenfor kan vi utlede på bakgrunn av **Einsteins regel for addisjon av relative hastigheter**.

La oss ta for oss 3 objekter  $A$ ,  $B$  og  $C$ . Dersom  $v_{AB}$  er hastigheten til  $A$  relativt  $B$  og  $v_{BC}$  er hastigheten til  $B$  relativt  $C$ , da ville en nok intuitivt tenke som Galilei og si at

$$v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$$

må bli hastigheten til  $A$  relativt  $C$ . Tro det eller ei, men dette er faktisk ikke riktig! Og problemet oppstår i forbindelse med Einsteins 2. postulat (det 1. postulatet var relativitetsprinsippet, se ovenfor):

Lyshastigheten  $c$  i vakuum er konstant, uavhengig av kildens eller observatørens relative hastighet.

Nå ser du problemet med Galileis addisjonsformel: Dersom  $v_{AB} = c$  (dvs  $A$  er et lyssignal som beveger seg med hastighet  $c$  i forhold til  $B$ ), blir  $v_{AC} \neq c$  (dvs  $C$  vil påstå at hastigheten til lyssignalet  $A$  ikke er lik  $c$ )!!

Løsningen har vi med Einsteins addisjonsregel:

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB} \cdot v_{BC}/c^2}$$

Setter du nå  $v_{AB} = c$ , vil du også finne at  $v_{AC} = c$ , i samsvar med postulatet ovenfor.

Utstyrt med denne formelen kan vi nå regne ut hvor stor Lorentzkontraksjon ladningen  $q$  ser for henholdsvis de positive og de negative ladbingsbærerne i den strømførende lederen.

Lederladningenes hastighet målt av Pål:

$$u_{\pm} = \frac{\pm u + (-v)}{1 + (\pm u) \cdot (-v)/c^2} = \pm \frac{u \mp v}{1 \mp uv/c^2}$$

Her er lederladningene objekt  $A$  (øvre fortegn for de positive), Pål og ladningen  $q$  er objekt  $C$ , mens Per tilsvarende objekt  $B$ . Dermed er  $v_{AC} = u_{\pm} =$  lederladningenes hastighet relativt Pål og  $q$ ,  $v_{AB} = \pm u =$  lederladningenes

hastighet relativt Per (dvs laboratoriet, der lederen ligger i ro), mens  $v_{BC} = -v = \text{Pers}$  (og laboratoriets) hastighet relativt Pål (og ladningen  $q$ ).

Da kan vi regne ut "Lorentzkontraksjonsfaktorene"  $\gamma_{\pm}$  for de positive (øvre fortegn) og de negative (nedre fortegn) lederladningene, sett fra Pål og  $q$  sitt referansesystem:

$$\begin{aligned}\gamma_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{1 - u_{\pm}^2/c^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(u \mp v)^2}{(1 \mp uv/c^2)^2 c^2}}} \\ &= \frac{1 \mp uv/c^2}{\sqrt{(1 \mp uv/c^2)^2 - (u \mp v)^2/c^2}} \\ &= \frac{1 \mp uv/c^2}{\sqrt{1 \mp 2uv/c^2 + u^2 v^2/c^4 - u^2/c^2 - v^2/c^2 \pm 2uv/c^2}} \\ &= \frac{1 \mp uv/c^2}{\sqrt{(1 - u^2/c^2) \cdot (1 - v^2/c^2)}}\end{aligned}$$

Dette gjør oss i stand til å regne ut tettheten av lederladninger, observert fra Pål og  $q$  sitt referansesystem:

$$\lambda_{\pm} = \gamma_{\pm} \lambda_0$$

der (NB!)  $\lambda_0$  er (antalls-)tettheten av lederladninger *målt av lederladningene selv*. Per, i ro i laboratoriet, måler antallstettheten  $\lambda$  for lederladningene. Ettersom disse har hastigheten  $u$  relativt Per, blir sammenhengen mellom  $\lambda$  og  $\lambda_0$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \lambda_0 \quad (> \lambda_0)$$

Dvs like stor Lorentzkontraksjon for positive og negative lederladninger, sett fra Pers ståsted. (Sagt på en annen måte: Fordi Per måler like stor antallstetthet for positive og negative lederladninger, og dermed en elektrisk nøytral leder, og samtidig like stor hastighet ( $\pm$ )  $u$ , betyr det at lederladningene selv også må måle en like stor antallstetthet  $\lambda_0$ , enten de nå er av det positive eller negative slaget.)

Tilbake til Pål og  $q$ , som nå altså ikke observerer en elektrisk nøytral leder, men derimot en ladet leder med ladning pr lengdeenhet

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda_+ - \lambda_- \\ &= \gamma_+ \lambda_0 - \gamma_- \lambda_0 \\ &= (\gamma_+ - \gamma_-) \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2} \lambda \\ &= \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2} \lambda}{\sqrt{(1 - u^2/c^2) \cdot (1 - v^2/c^2)}} \cdot \left[ 1 - \frac{uv}{c^2} - \left( 1 + \frac{uv}{c^2} \right) \right] \\ &= -\frac{2\lambda v u}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}$$

Det negative fortegnet innebærer at Pål ser en *negativt* ladet leder, noe vi allerede fant ut på side 3. Nå har vi i tillegg altså regnet ut *hvor mye* negativ ladning Pål ser på lederen.

Dermed kjenner vi elektrisk kraft målt av Pål (side 3), hvoretter vi kan regne ut magnetisk kraft målt av Per, dvs i laboratoriet:

$$\begin{aligned}F_{\text{Per}} = F_m &= \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot q \cdot \frac{2\lambda v u}{2\pi\epsilon_0 a c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= qv \frac{2\lambda u}{2\pi\epsilon_0 c^2 a} \\ &= qv \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 a}\end{aligned}$$

= *magnetisk kraft* fra strømførende leder på ladning  $q$  i avstand  $a$  og med hastighet  $v$  langs lederen.

Dvs: Som vårt eksperiment, med

$$k = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2}$$

(dvs en naturkonstant)

La oss skrive

$$F_{\text{Per}} = F_m = qvB$$

med

$$B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 a}$$

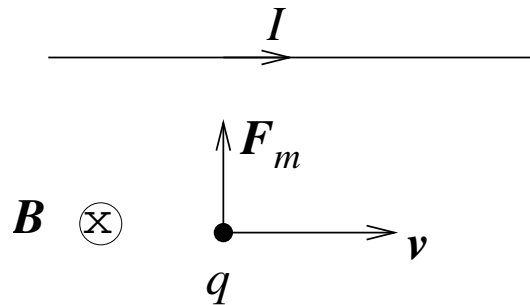
Størrelsen  $B$  er nettopp *magnetfeltet* (her: i avstand  $a$  fra en lang, rett strømførende leder med strøm  $I$ ), og  $F_m$  er den *magnetiske kraften* på ladningen  $q$  med hastighet  $v$ .

Merk at vi har fått oppklart to viktige spørsmål:

- Hvor kommer magnetfeltet fra?  
Svar: Fra ladninger i bevegelse, dvs *elektrisk strøm*.
- Hvordan virker den magnetiske kraften på en ladning i bevegelse?  
Svar:  $F_m = qvB$

Men hvordan uttrykke  $F_m = qvB$  på *vektorform*? Både  $\mathbf{F}_m$  og  $\mathbf{v}$  er jo vektorer, men ikke parallelle vektorer....

Vi må ty til *kryssprodukt*! La  $\mathbf{B}$  være en vektor som peker inn i planet:



Da ser vi at vi kan skrive:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

## KONKLUSJON:

Fra før: Elektrisk felt  $\mathbf{E}$  lages av ladninger (i ro eller i bevegelse) og resulterer i elektrisk kraft på ladninger (i ro eller i bevegelse):

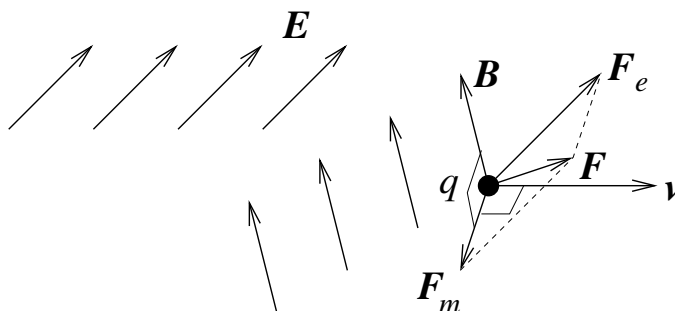
$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$$

Nå: Magnetfelt  $\mathbf{B}$  lages av strøm (dvs ladninger i bevegelse) og resulterer i magnetisk kraft på ladninger i bevegelse:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Med både  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{B}$  til stede samtidig, påvirkes ladningen  $q$  med hastighet  $\mathbf{v}$  av *Lorentzkraften*

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$



Tekst: Jon Andreas Støvneng 2009.