Inst. for fysikk 2012

TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme
Notat 5: Kompleks impedans

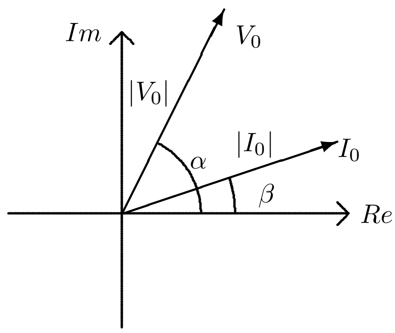
Lærebøkene Young & Friedman (kap. 31) og Lillestøl, Hunderi og Lien (Kap 27) bruker ikke kompleks notasjon for AC-kretser, kun sinus-cosinus-notasjon. Men begge presenterer fasediagram for harmoniske signal, så de er ganske nær kompleks notasjon. Her følger en kort oppsummering av det som er presentert i forelesning om kompleks notasjon ifb. med harmoniske signal, også kalt AC-signal.

A.Mikkelsen 10. april 2012.

Den komplekse størrelsen

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \tag{1}$$

kan representeres med en viser i kompleksplanet. Kompleksplanet har realdel som abscisse (x-akse) og imaginærdel som ordinat (y-akse). Viseren for (1) har lengde lik 1 og roterer rundt med vinkelfart ω. Realdelen varierer da som en cos-funksjon og imaginærdelen som en sin-funksjon som gitt i (1). Istedenfor $V(t) = V_0\cos\omega t$ osv. kan vi da enkelt bruke følgende uttrykk for harmonisk varierende signal:



$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 e^{i\omega t} &(2)\\ I(t) &= I_0 e^{i\omega t}. &(3)\end{aligned}$$

Her må vi tillate amplitudene V_0 og I_0 å være komplekse størrelser,

$$V_0 = |V_0|e^{i\alpha}, \tag{4}$$

$$I_0 = |I_0|e^{i\beta}. \tag{5}$$

Viserne for V_0 og I_0 framkommer i figuren til høyre. Viserne for $V(t)$ og $I(t)$ roterer rundt med vinkelfart ω, og posisjonen ved $t = 0$ er vist med henholdsvis V_0 og I_0 i figuren.

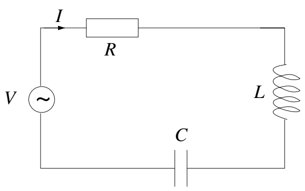
Kretsens impedans Z blir uavhengig av tida og er en kompleks størrelse:

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{|V_0|}{|I_0|}e^{i(\alpha-\beta)} = |Z|e^{i\phi}. \tag{6}$$

Dvs. den komplekse impedansen har innebygd informasjon om både forholdet mellom strømmens og spenningens amplitude $|Z| = |V_0|/|I_0|$, *og* faseforskyvningen $\phi = \alpha - \beta$ mellom påtrykt spenning og resulterende strøm! Smart! Vi velger ofte $\alpha = 0$ (bekvemt hvis V er pådraget), men vi kan alternativt velge $\beta = 0$ (hvis I er pådraget).

Regneteknisk: Poenget er at den deriverte av eksponentialfunksjonen er eksponentialfunksjonen selv. Dermed vil alle ledd i ligningen(e) som følger når vi anvender Kirchhoffs regler, ha *samme* tidsavhengige faktor $e^{i\omega t}$, som dermed kan forkortes uten videre. Vi slipper å styre og herje med å skrive om trigonometriske funksjoner for å bestemme $|Z|$ og ϕ.

Eksempel: RLC-krets med vekselspenningskilde $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$:



For RLC-kretsen er spenningen over de ulike komponenter:

$$V_R(t) = RI(t) \quad\Rightarrow\quad \underline{Z_R = \frac{V_R}{I} = R}$$

$$V_L(t) = L\dot{I}(t) \stackrel{(3)}{=} Li\omega I(t) \quad\Rightarrow\quad \underline{Z_L = \frac{V_L}{I} = i\omega L}$$

$$V_C = Q_C/C \quad\Rightarrow\quad \underline{Z_C = \frac{V_C}{I} = 1/i\omega C.}$$

Siste uttrykk har vi fått ved bl.a. derivasjon:

$$\dot{V}_C = \dot{Q}_C/C = I/C \quad\stackrel{(2)}{\Rightarrow}\quad i\omega V_C = I/C \quad\Rightarrow\quad Z_C = \frac{V_C}{I} = 1/i\omega C.$$

Kirchhoffs spenningslov for kretsen gir

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C = (R + i\omega L + 1/i\omega C)I(t) = ZI(t)$$

hvor den komplekse impedansen er

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i\omega L + 1/i\omega C = R + i\,(\omega L - 1/\omega C) \tag{7}$$

$$\text{med} \qquad |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \qquad \text{og} \qquad \phi = \arg Z = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right). \tag{8}$$

(forts.)

Strømmens komplekse amplitude er

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{R + i\omega L + 1/i\omega C} , \tag{9}$$

$$\text{eller} \qquad I_0 = \frac{|V_0|e^{i\alpha}}{|Z|e^{i\phi}} = \frac{|V_0|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{i(\alpha-\phi)} = |I_0|e^{i\beta} \tag{10}$$

Oppsummert:

Impedans for motstand R: $Z_R = R$

Impedans for induktans L: $Z_L = i\omega L = e^{i\pi/2}\omega L$

Impedans for kapasitans C: $Z_C = 1/i\omega C = e^{-i\pi/2}/\omega C$.

Strøm gjennom induktans ($I = V_L/Z_L$) er altså faseforskjøvet $\pi/2$ *etter* spenningen og $|I_0| \to 0$ når $\omega \to \infty$.
Strøm gjennom kapasitans ($I = V_C/Z_C$) er faseforskjøvet $\pi/2$ *foran* spenningen og $|I_0| \to 0$ når $\omega \to 0$.

Disse uttrykkene kan du selv overbevise deg om ved å se på tre kretser hver for seg, med en spenningskilde $V_0e^{i\omega t}$ koblet til hhv. en motstand, en induktans og en kapasitans.

Seriekopling: Merk at den komplekse impedansen (7) ganske enkelt er en sum av enkeltimpedansene Z_R, Z_L og Z_C. Dvs: Samme regel for seriekobling av komplekse impedanser i AC-kretser som for seriekoblede resistanser i DC-kretser!

Parallellkopling: Da er det nok ingen overraskelse at vi også har samme regel for parallellkobling av komplekse impedanser i AC-kretser som for parallellkobling av vanlige resistanser i DC-kretser. Eksempel: Total impedans i en krets med en R, L og C koblet i parallell er gitt ved

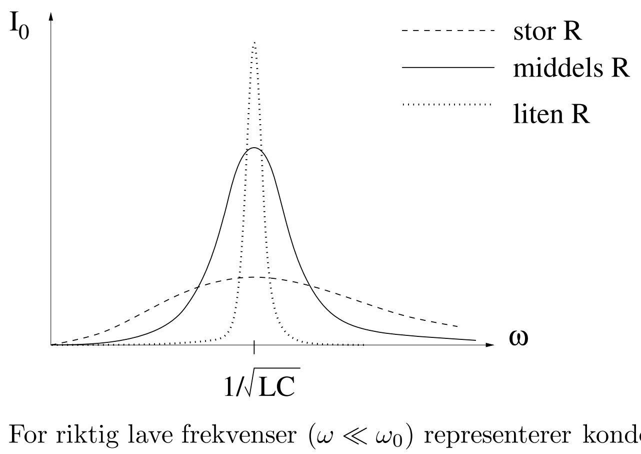
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C$$

MERKNAD: Idet vi slår på spenningen $V(t)$ (med en bryter) får vi et "innsvingningsforløp" som ikke er harmonisk. Vi er normalt ikke interessert i dette, og betrakter derfor kun den harmoniske løsningen. Som kjent er en løsning av en diff.likning, som Kirchhoff 2 er, sammensatt av av en partikulær og en homogen løsning. Vi er her bare interessert i den partikulære løsningen med $V(t) = V_0e^{i\omega t}$ som pådrag. Dvs. vi betrakter kun "tvungne" svingninger, dvs. svingninger med samme (vinkel-)frekvens som påtrykt spenning.

Resonans i RLC-kretsen

RLC-kretsen beskrevet over gir resonans ved en bestemt frekvens ω_0 for pådraget. Denne frekvensen er bestemt av at strømamplituden $|I_0|$ blir veldig stor, som vi finner fra likn. (10):

$$I_0 \text{ maksimum} \quad \Rightarrow \quad R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2 = \text{minimum} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{1/LC} = \omega_0 \tag{11}$$



Figuren viser hvordan $|I_0|$ varierer med ω ifølge likn. (10) for hhv. stor, middels og liten verdi for resistansen R. Ved $\omega = \omega_0$ får vi maksimal amplitude på strømmen med $|I_0| = |V_0|/R$. Vi har da *resonans.* Frekvensen til den påtrykte spenningen "matcher" da den elektriske kretsens "naturlige frekvens" ω_0.

For riktig lave frekvenser ($\omega \ll \omega_0$) representerer kondensatoren et brudd i en tilnærmet likestrømkrets. Da er det ikke urimelig at $I_0 \to 0$. For riktig høye frekvenser ($\omega \gg \omega_0$) blir indusert motspenning i induktansen L stor selv uten strøm av betydning. Da er det heller ikke urimelig at $I_0 \to 0$ i denne grensen.