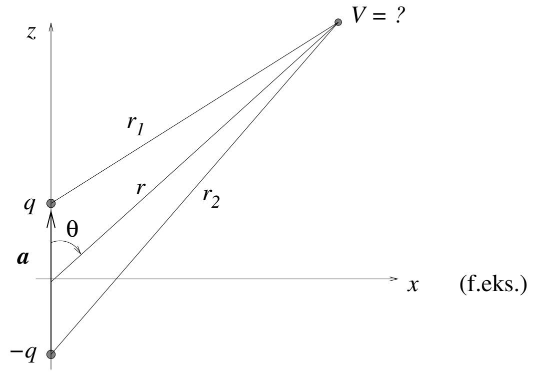
Inst. for fysikk 2012 **TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme**

# Øving 6
# Dipol. Platekondensatorer.

*Veiledning:* 20. og 21. feb. ifølge nettsider.
*Innlevering:* Onsdag 22. feb. kl. 14:00

**Oppgave 1 Potensial rundt dipol.**




I en tidligere øving betraktet vi en elektrisk dipol, bestående av to punktladninger $\pm q$ lokalisert på $z$-aksen i $z = \pm a/2$. Vi regnet ut det eksakte potensialet $V_\mathrm{e}(x,z)$ og fant

$$V_\mathrm{e}(x,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(z-a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(z+a/2)^2}}\right).$$

Deretter viste vi at potensialet i stor avstand fra dipolen ($r \gg a$) blir tilnærmet lik (indeks a for "approximately")

$$V_\mathrm{a}(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}.$$

Her er $r$ avstanden fra origo, dvs dipolens midtpunkt, og $\theta$ er vinkelen mellom $z$-aksen og $\vec{r}$. (Dipolmomentet er $p = qa$.)

Vi skal visualisere dipolpotensialet og sammenligne det tilnærmede uttrykket $V_\mathrm{a}$ med det eksakte uttrykket $V_\mathrm{e}$. Dette kan vi gjøre ved å skrive et program i Octave (eller MatLab) som regner ut differansen – eller kanskje like gjerne det prosentvise avviket $\Delta = 100\cdot|(V_\mathrm{e}-V_\mathrm{a})/V_\mathrm{e}|$ mellom det eksakte og det tilnærmede uttrykket gitt ovenfor – og som plotter $V_\mathrm{e}(x,z)$, $V_\mathrm{a}(x,z)$ og "feilen" $\Delta(x,z)$ i tre forskjellige figurer.

NOEN TIPS OG KOMMENTARER:

- Skriv først om $V_\mathrm{a}(r,\theta)$ (i kulekoordinater) til $V_\mathrm{a}(x,z)$ (kartesiske koordinater).
- Det er mulig å plotte potensialene i SI-enhet (V) som funksjon av $x$ og $z$ i en passende enhet. Men det er generelt mye mer praktisk å plotte dimensjonsløse størrelser som funksjon av dimensjonsløse koordinater. Vi plotter slik *essensen* i de aktuelle funksjonene. Vil sterkt anbefale å lære dette, og her er et forslag til hvordan dette kan gjøres:
  Uttrykkene inneholder lengdeskalaen $a$, slik at det er naturlig å innføre de dimensjonsløse koordinater
  $$\xi = x/a, \quad \eta = z/a.$$
  Uttrykkene inneholder også ladningen $q$ og $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, slik at det er naturlig å bruke potensial relativt til potensialet $V_0 = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$ = potensial i avstand $a$ fra en punktladning $q$. De dimensjonsløse potensial blir da
  $$v_\mathrm{e} = \frac{V_\mathrm{e}}{V_0} = V_\mathrm{e}\cdot\frac{4\pi\epsilon_0 a}{q}, \qquad v_\mathrm{a} = \frac{V_\mathrm{a}}{V_0} = V_\mathrm{a}\cdot\frac{4\pi\epsilon_0 a}{q}.$$
  Dette gir de dimensjonsløse uttrykk $v_\mathrm{e}(\xi,\eta)$ og $v_\mathrm{a}(\xi,\eta)$ som du selv enkelt kan bestemme.
- Finn et fornuftig område i $(x,z)$-planet for plottene dine, f.eks. $-2 < \xi < 2$ og $-2 < \eta < 2$.
- Det kan være lurt å begrense også "funksjonsaksen" i plottene dine, da potensialet blåser opp i nærheten av ladningene.
- Noen kommandoer og funksjoner som du kan få bruk for:
  `meshgrid (el. linspace), mesh, axis, caxis, figure, xlabel, ylabel, zlabel`. Let opp dokumentasjon for hjelp til å bruke disse. (F.eks. google "gnu octave manual" eller "mathworks matlab manual".)
- Det viktigste poenget med denne oppgaven er å få litt trening i å bruke programmering i tilknytning til det å jobbe med fysikk. Du vil få flere anledninger seinere.

**Oppgave 2** ***E*-felt rundt dipol.**

a) Ta utgangspunkt i det tilnærmede uttrykket $V_{\rm a}(r,\theta)$ for potensialet rundt en dipol fra oppgave 1, og bestem det elektriske feltet $\vec{E}(r,\theta) = E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta}$ i stor avstand fra dipolen. Det oppgis at gradientoperatoren i kulekoordinater er

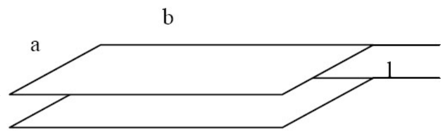
$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Kontroller om disse uttrykkene er fornuftige for $\theta = 0$ og for $\theta = \pi/2$. Hva med $r = 0$?

b) På grunn av rotasjonssymmetrien omkring $z$-aksen kan vi f.eks. anta at vi befinner oss i $xz$-planet. Bestem det elektriske feltet $\vec{E}(x,z) = E_x\hat{x} + E_z\hat{z}$ uttrykt i kartesiske koordinater for $r \gg a$. Tips: Ta utgangspunkt i uttrykkene for $E_r$ og $E_\theta$ i punkt *b*). Tegn gjerne opp en figur og finn på den måten sammenhengen mellom koordinatene $(x,z)$ og $(r,\theta)$, og feltkomponentene $E_x, E_z$ og $E_r, E_\theta$.

**Oppgave 3 Platekondensator.**

En parallellplatekondensator består av to rektangulære plater med sidekanter $a$ = 10 cm og $b$ = 50 cm. Avstanden mellom platene, $\ell$, kan varieres, og er i starten $\ell = \ell_1$ = 3,0 mm og det er da luft mellom platene. Kondensatoren lades opp til en spenning $V_1$ = 300 V. Vi antar at ladningen er uniformt fordelt på innsiden av platene og at vi kan se bort fra endeeffekter.




a) Hva er den elektriske feltstyrken $E$ mellom kondensatorplatene?
b) Hva er den elektriske feltstyrken utenfor (over og under) kondensatorplatene? Begrunn svaret!
c) Hva er kondensatorens kapasitans $C$?

Forbindelsen til spenningskilden brytes etter at kondensatoren er ladd. Avstanden mellom kondensatorplatene økes til $\ell = \ell_2 = 6,0$ mm for akkurat å gi plass til en plate av dielektrisk materiale av samme tykkelse. Det dielektriske materialet fyller hele hulrommet mellom kondensatorplatene. Spenningen på kondensatoren måles nå til 1/10 (10%) av den opprinnelige spenningen.
d) Bestem relativ permittivitet (dielektrisitetskonstant) $\epsilon_r$ for materialet som settes inn i platekondensatoren.
*Tips:* Ladningen kan ikke endres når spenningskilden er frakopla.

**Oppgave 4. Seriekopling av kondensatorer.**

a) Utled uttrykket for resultantkapasitansen $C$ når to kondensatorer (med kapasitans $C_1$ og $C_2$) koples i serie.

b) En dielektrisk plate med tykkelse $d$ og relativ permittivitet $\epsilon_r$ puttes inn i en parallellplatekondensator med plateavstand $D$ $(d < D)$. Arealet av alle plater er $A$ og plateavstandene er små i forhold til arealet. Hva blir kapasitansen til den nye kondensatoren?
*Tips:* Seriekopling.

c) Vi måler kapasitansen for den nye kondensatoren til å være 125 pF. Hva er den relative permittiviteten $\epsilon_r$ til plata når $A = 300\,\mathrm{cm}^2$, $d$ = 1,25 mm og $D$ = 3,00 mm?

---

Utvalgte fasitsvar:
2a) $E_r = p\cos\theta/2\pi\epsilon_0 r^3$, $E_\theta = p\sin\theta/4\pi\epsilon_0 r^3$,
2b) $E_x = 3pxz/4\pi\epsilon_0(x^2+z^2)^{5/2}$, $E_z = p(2z^2 - x^2)/4\pi\epsilon_0(x^2+z^2)^{5/2}$;
3c) 0,15 nF, 3d) 20; 4c) 3,34.