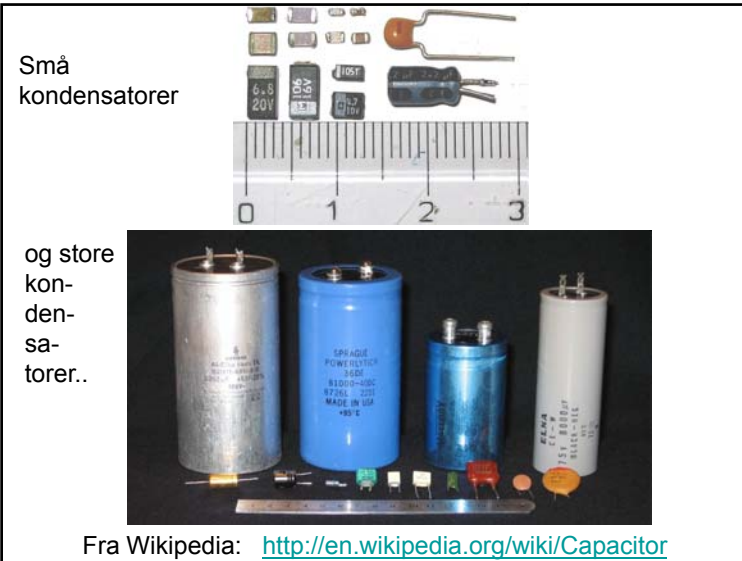


Kap. 24 Kapasitans og dielektrika

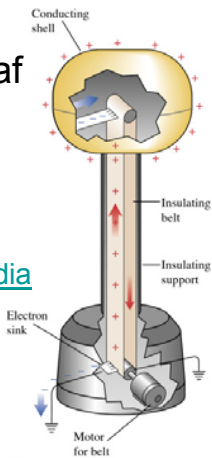
- Grunnleggende forståelse for
 - HVA en kondensator er,
 - HVORFOR den virker som den gjør,
 - hvilke BEGRENSENINGER den har og
 - hvorfor et DIELEKTRIKUM er påkrevd i en kondensator.
- Kapasitans
- Energi i kondensatorer og ladningssamlinger generelt
- Beskrive et dielektrikum:
 - polarisering P ,
 - elektrisk flukstetthet D ,
 - relativ permittivitet ϵ_r ,
 - Gauss' lov for dielektrika.



Van de Graaf generator

Y&F fig 22.27

Se også [Wikipedia](#)



Oppgitt overslagsspenning	
kV	ved cm
30	1
55	2
80	3
100	4
125	5,5

Coronautlading ved
 $E_{\max} = 30 \text{ kV/cm}$ på overflata
 $\Rightarrow V_{\max} = E_{\max} R = 270 \text{ kV}$

Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley.



Jordkloden: Ladning og felt

-1C kule på 10 kg:

$F_e = 1C \cdot 130 \text{ N/C} = 130 \text{ N}$ oppover

$mg = 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ N/kg} = 98 \text{ N}$ nedover

$E = 130 \text{ V/m}$ (nedover)

$C = 4\pi\epsilon_0 R = 0,71 \text{ mF}$

$V = ER = -0,83 \text{ GV}$

$Q = CV = -0,59 \text{ MC}$

$R = 6400 \text{ km}$

Kap. 24 Kapasitans og dielektrika

- Kondensatorer = to ledere som kan lagre ladning
- Kapasitans: $C = Q/V$ (enhet F = farad)
der $V = V_2 - V_1$ for to ledere (Type A)
eller $V = V - V_\infty$ for enkeltleder (Type B)

- Eks. 1: Enkeltkule: $C = 4\pi\epsilon_0 R$
- Eks. 2: Parallellplatekondensator $C = \epsilon_0 A/d$
- Eks. 3: Kulekondensator $C = 4\pi\epsilon_0 r_b r_a / (r_b - r_a) \rightarrow 4\pi\epsilon_0 r_a$ når $r_b \rightarrow \infty$
- Eks. 4: Sylinderkondensator (koakskabel)
- Seriekopling og parallellkopling

- Uttrykk for energi i kondensatorer
- Dielektriske materialer: Elektrisk polarisering P
- Elektrisk flukstetthetsvektor: D
- Gauss' lov for dielektrika.

Parallellplatekondensator: $C = \epsilon_0 A/d$

ike or:

Hvor stort areal for 1F – kondensator hvis $d = 1 \text{ mm}$?

$$A = C d / \epsilon_0 = 1 \text{ F} \cdot 1 \text{ mm} / 9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 110 \text{ km}^2 \quad !!$$

Eks. 1: Enkeltkule (ladning q)
Type B

$C = 4\pi\epsilon_0 R$

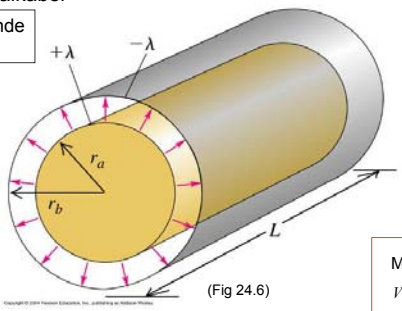
Eks. 3: Kulekondensator
Type A = to kuleskall med ladning $+Q$ og $-Q$
=Ex. 24.3

$C = 4\pi\epsilon_0 r_b r_a / (r_b - r_a) \rightarrow 4\pi\epsilon_0 r_b r_a / r_b = 4\pi\epsilon_0 r_a$ når $r_b \rightarrow \infty$

(Fig 24.5)

Eks. 4: **Sylinderkondensator** = Y&F Ex. 24.4
 = to sylinderskall med ladning $+\lambda$ og $-\lambda$ (C/m)
 = koaksialkabel

Utregnes helt tilsvarende som kulekondensator.



(Fig 24.6)

1) Finn E_r
 2) integrer og finn $V(r)$ (Metode 2) (\approx Eks 9 Kap 23)
 3) finn kapasitansen $C = Q/V_{ab}$

Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dq}{r}$$

Metode 2:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Uttrykk kapasitans

$C = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot \underbrace{(\text{geometrifaktor})}_{\text{enhet: meter}}$

- Koaksialkondensator: $C = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot 2\pi / \ln(r_d/r_b) \cdot l$
- Parallellplatekondensator: $C = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot A/d$
- Kulekondensator: $C = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r_b r_a / (r_b - r_a)$
 $\rightarrow \epsilon_r \epsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r_a$ når $r_b \rightarrow \infty$

Aud R2: Hvor mye energi for å plassere inn mange 1C ladninger?

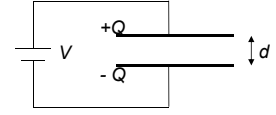
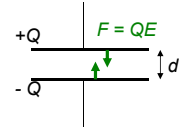
$U_1 = 0$
 $U_2 = V_{21} \cdot Q$
 $U_3 = (V_{31} + V_{32}) \cdot Q$

O.S.V.

Øking av avstand d i platekondensator:

$\Rightarrow C = \epsilon_0 A/d$ avtar

- Tilkopla batteri:
 - V konstant
 - $Q = CV$ avtar
 - E avtar
 - $U = \frac{1}{2} QV$ avtar (gis til batteriet)
- Frakopla batteri:
 - Q konstant
 - $V = Q/C$ øker
 - E konstant
 - $U = \frac{1}{2} QV$ øker (tilføres fra ytre kraft)

Beregning fra arbeid: $\Delta U = F \Delta d = QE \Delta d$

Elektrisk energi

1. Uttrykt med ladning og potensial:

$$U = \frac{1}{2} V Q = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q^2 / C \quad (24.9)$$

(utledet for kondensator; all Q på samme V)

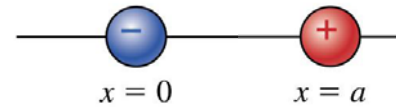
$$U = \frac{1}{2} \int V dq \quad (24.9C)$$

(ulike dq på ulike V)

Kap 23, eks. 2. Presiseringer

Energiberegning under oppbygging:

$$q_1 = -e \quad q_2 = +e$$



$$\begin{aligned} & q_1 \text{ først, så } q_2: \\ U &= U_1 + U_2 \\ &= 0 + q_2 k q_1 / a \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & q_2 \text{ først, så } q_1: \\ U &= U_2 + U_1 \\ &= 0 + q_1 k q_2 / a \end{aligned}$$

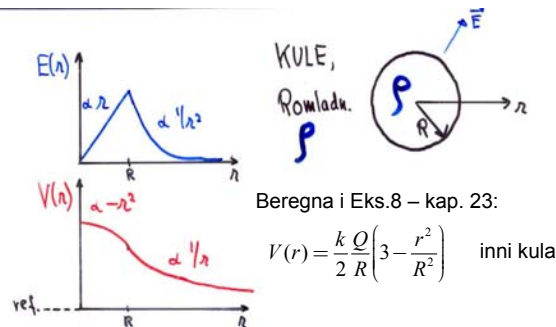
Ferdig oppbygd:	ved potensial	energi
q_1	$V_1 = k q_2 / a$	$q_1 V_1 = q_1 k q_2 / a$
q_2	$V_2 = k q_1 / a$	$q_2 V_2 = q_2 k q_1 / a$
	Sum: $\sum q_i V_i = 2 q_2 k q_1 / a$	Regnet dobbelt!

Konklusjon:

Energi beregnet fra potensial i ferdig oppbygd ladning: $U = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$

Brukes i Øving 5, oppgave 2 a)

Eks.5: Energi for homogent ladd kule



Beregna i Eks.8 – kap. 23:

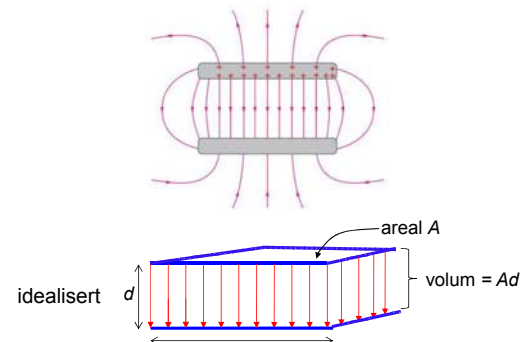
$$V(r) = \frac{k Q}{2 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{inni kula}$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint V(r) dq \quad (24.9C)$$

OBS: $dq = 0$ utenfor kula

$$= \frac{3}{5} \frac{k Q^2}{R}$$

Energi U uttrykt med E -feltet



$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A d$$

$$u = U / \tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Elektrisk energi

1. Uttrykt med ladning og potensial:

$$U = \frac{1}{2} \int V dq \quad (= \frac{1}{2} V Q = \frac{1}{2} C V^2) \quad (24.9C)$$

2. Uttrykt med elektrisk felt:

$$U = \int u d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 d\tau \quad (24.11B)$$

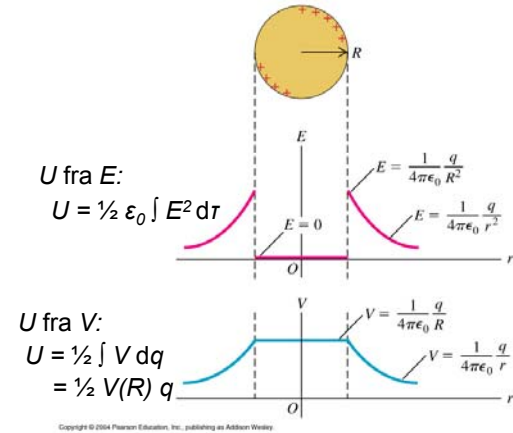
Hvor er energien lagra:

I **ladningene** eller i det **elektriske feltet**?

På platene eller **mellom** platene?

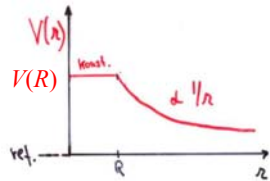
To uttrykk for **SAMME energi!**

Eks. 6: Energi på lederkule med ladning q



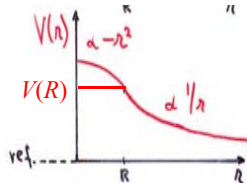
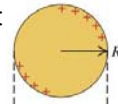
Eks.5+6

$$U = \frac{1}{2} \iiint V(r) dq$$



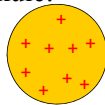
Eks.6: Ladd lederkule:

$$U = \frac{1}{2} kq^2/R$$



Eks. 5: Homogent ladd kule:

$$U = \frac{3}{5} kq^2/R^2 = \frac{6}{5} \cdot U_{\text{ladd lederkule}}$$



Kap. 24 Kapasitans og dielektrika

• Gjennomgått:

- Kondensatorer = to ledere som kan ta opp ladning
- Kapasitans: $C = Q/V$ (farad), med eksempler:
 - » Enkeltkule: $C = 4\pi\epsilon_0 r_a$
 - » Parallellplate: $C = \epsilon_0 A/d$
 - » Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 r_b r_a / (r_b - r_a)$
- Seriekopling og parallellkopling
- Energi i kondensatorer $U = \frac{1}{2} V Q = \frac{1}{2} C V^2$
- Energi i ladningssamlinger $U = \frac{1}{2} \int V dq$
 $U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 d\tau$

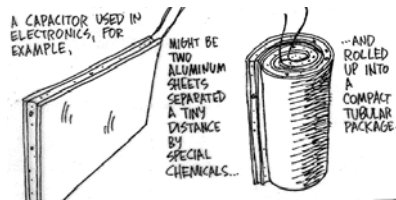
• Videre:

- Dielektriske materialer: Elektrisk polarisering P
- Elektrisk flukstetthetsvektor: D
- Gauss' lov for dielektrika.

Dielektrika og elektrisk polarisering

Materialer:

- Vakuum
- Ledere
- Dielektrikum

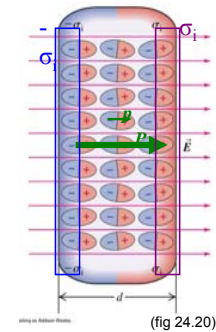


- Mellom plater i kondensator brukes alltid et dielektrikum
- Kapasitansen øker da med en faktor ϵ_r .

Kap. 24 Kapasitans og dielektrika

Ferdig gjennomgått:

- Kondensatorer = to ledere som kan ta opp ladning
- Kapasitans: $C = Q/V$ (farad)
- Parallellplatekondensator: $C = \epsilon_0 A/d$
- Seriekopling og parallellkopling.
- Energi: $U = \frac{1}{2} \int V dq = \frac{1}{2} V Q = \frac{1}{2} CV^2$
- Energi uttrykt med elektrisk felt



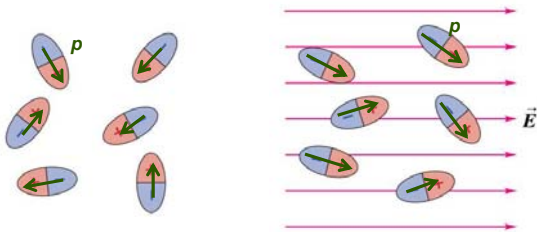
Videre:

- Dielektriske materialer (forts):
Elektrisk polarisering $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$
- Elektrisk flukstetthetsvektor: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$
- Gauss' lov for dielektrika:
Noen anvendelser/eksempler

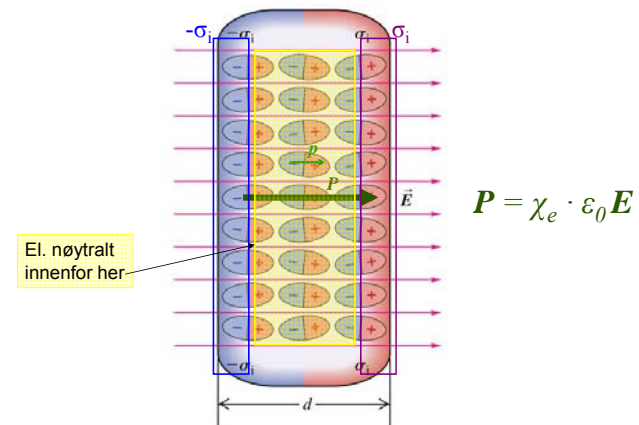
Kraftmoment dipol:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{d}/2 \times q\vec{E} + (-\vec{d}/2) \times (-q\vec{E}) \\ &= q\vec{d} \times \vec{E} \\ &= \vec{p} \times \vec{E} \end{aligned}$$

Kraftmoment dreier \mathbf{p} til å bli (om mulig) parallell med \mathbf{E}



Dipolinnetting (polarisering) gir flateladning σ_i (i = indusert ladning)



$$\mathbf{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}$$

Relative Permittivity
Table 24.1 Values of Dielectric Constant κ at 20°C

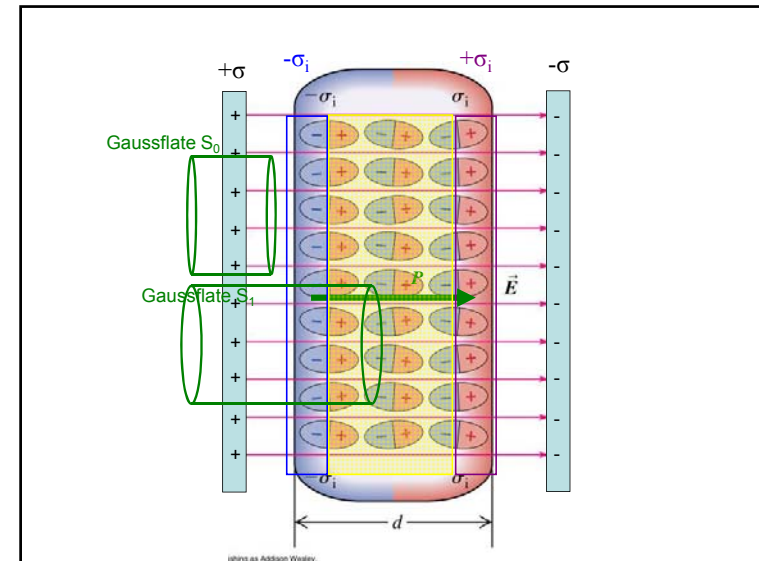
Material	κ ϵ_r	Material	κ ϵ_r
Vacuum	1	Polyvinyl chloride	3.18
Air (1 atm)	1.00059	Plexiglas	3.40
Air (100 atm)	1.0548	Glass	5–10
Teflon	2.1	Neoprene	6.70
Polyethylene	2.25	Germanium	16
Benzene	2.28	Glycerin	42.5
Mica	3–6	Water	80.4
Mylar	3.1	Strontium titanate	310

Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

Relative permittivity
Table 24.2 Dielectric Constant and Dielectric Strength of Some Insulating Materials

Material	Constant, κ ϵ_r	Dielectric strength E_m (V/m)
Polycarbonate	2.8	3×10^7
Polyester	3.3	6×10^7
Polypropylene	2.2	7×10^7
Polystyrene	2.6	2×10^7
Pyrex glass	4.7	1×10^7
Luft:		3×10^6

Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.



Gauss' lov:

- Gauss' lov for fri ladning Q : $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$ (12) Mest praktiske
og finn E fra $D = \epsilon_r \epsilon_0 E$
- Gauss' lov for indusert ladning Q_i : $\oint \vec{P} \cdot d\vec{A} = -Q_i$ (11)
- Gauss' lov for totalladning Q_{tot} : $\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{tot}$ (10)
 $Q_{tot} = Q + Q_i$
- I alle tidligere formler kan $\epsilon_0 E$ erstattes av ϵE , dvs. $\epsilon_r \epsilon_0 E$
f.eks: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}$

Øving 7 !!

Eks. 7 Parallellplatekondensator uten og med dielektrikum

A. Frakopla batteri:
Konstant: $\sigma = D = Q/A$
 Avtar: $V_1 = V_0/\epsilon_r$
 Øker: $C_1 = Q/V_1 = \epsilon_r C_0 = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$
 Energi: $U_1 = \frac{1}{2} QV_1$ **avtar**

B. Tilkopla batteri:
Konstant: $V_1 = V_0$
 Øker: $\sigma_1 = D_1 = Q_1/A = \epsilon_r D_0$
 Øker: $C_1 = Q/V_1 = \epsilon_r C_0 = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$
 Energi: $U_1 = \frac{1}{2} QV_1$ **øker**
 (tilføres fra batteriet)

Kap. 24: Oppsummering 1 Kondensatorer og kapasitans

- Kondensatorer = to ledere som kan ta opp ladning
- Kapasitans: $C = Q/V$ (farad)
- Enkeltkulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ (Eks. 1)
- Parallellplatekondensator: $C = \epsilon_0 A/d$ (Eks. 2)
- Kule(skall)kondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 r_a r_b / (r_b - r_a)$ (Eks. 3)
- Sylinderkondensator (koaks-kabel): $C' = 2\pi\epsilon_0 / \ln r_b / r_a$ (Eks. 4)
- Parallellkopling: $C = C_1 + C_2$ Seriekopling: $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$
- Energi ved ladning og potensial: $U = \frac{1}{2} \int V dq$
- Energi ved elektrisk felt: $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ dvs. $U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 d\tau$
 - For kondensator gir dette: $U = \frac{1}{2} VQ = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} Q^2/C$

Kap. 24: Oppsummering 2 Dielektrika og polarisering

- **Dielektriske materialer:**
- Elektrisk polarisering = dipoltetthet: $\mathbf{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}$
 - der χ_e er elektrisk susceptibilitet.
 - Relativ permittivitet $\epsilon_r = \chi_e + 1$ (dielektrisitetskonstant)
- Elektrisk flukstetthetsvektor: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$ (forskyvningsvektor)
- Elektrisk fluks: $\Phi = \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$
- Gauss' lov for fri ladning $Q = Q_{tot} - Q_i$:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q \quad \text{eller} \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q / \epsilon$$
- Gauss' lov for indusert ladning Q_i : $\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = -Q_i$
- Gauss' lov for totalladning Q_{tot} : $\oint \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q_{tot}$
- I alle tidligere formler kan $\epsilon_0 \mathbf{E}$ erstattes av $\epsilon \mathbf{E}$, dvs. $\epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$
- Mer utfyllende i [Notat1: Dielektriske materialer](#).

Gauss' lov:

- Gauss' lov for fri ladning Q : $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q$ (12) Mest praktiske
og finn \mathbf{E} fra $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$
- Gauss' lov for indusert ladning Q_i : $\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = -Q_i$ (11)
- Gauss' lov for totalladning Q_{tot} : $\oint \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q_{tot}$ (10)
 $Q_{tot} = Q + Q_i$
- I alle tidligere formler kan $\epsilon_0 \mathbf{E}$ erstattes av $\epsilon \mathbf{E}$, dvs. $\epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$
f.eks: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q / \epsilon$

Øving 7 !!

Gauss' lov

- Integralform: $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q$ $\Phi = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q$
- Differensialform: $\text{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ $\text{div} \mathbf{D} = \rho$
- $\text{div} \mathbf{D} =$ divergensen til \mathbf{D}
- $\text{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = [\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z] \cdot \mathbf{D}$

Spesielle dielektrika:

- Piezoelektriske materialer:
Mekanisk strekk eller trykk → polarisasjon P
(eller motsatt) E -felt → P -felt → deformasjon
Bruk: Kvartskrystaller, mikrofoner, pickup (platespillere "viny!")
- Electrets og ferroelektriske materialer:
Materialer med permanent polarisasjon P
(tilsvarer permanente magneter)
- Overslag ("breakdown"):
Overslag i dielektrika ved viss angitt grense ("dielectric strength")
Kondensatorer har oppgitt max spenning!

$P = \chi_e \cdot \epsilon_0 E$

χ_e	$\epsilon_r = \chi_e + 1$
1/3	4/3
1	2
3	4
∞	∞

$D = \epsilon_0 E + P$
endres ikke
(ingen endring
frie ladn.)

(# flukslinjer P) = $\chi_e \cdot$ (# flukslinjer $\epsilon_0 E$)

$$D = \epsilon_0 E + 0 = D = \epsilon_0 E + P = D = \epsilon_0 E + 0$$

avtar øker

$$D = 1 \cdot \epsilon_0 E = D = \epsilon_r \epsilon_0 E = D = 1 \cdot \epsilon_0 E$$

$$P = \chi_e \cdot \epsilon_0 E$$

der E er inni dielektriket, ikke ytre

Øving 6. Opg. 1 (Plotte V() med Matlab/Octave)

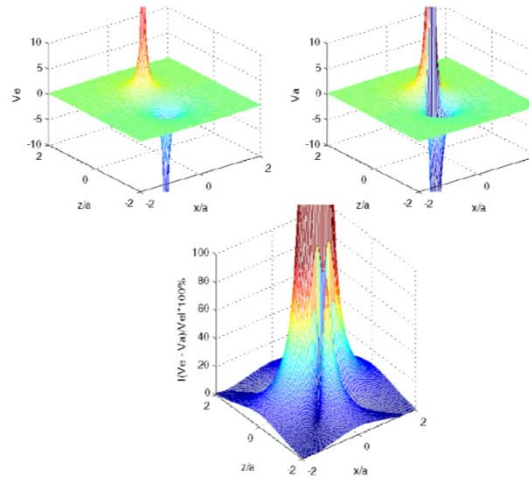
Definer og bruk dimensjonsløse variable i all numerisk analyse!

```
% Velg området -2 < x < 2 og -2 < z < 2 for plotting, ca 100 x 100 punkter i alt
[x,z] = meshgrid(-2 : 2/50 : 2, -2.01 : 2/50 : 2);
```

...

```
subplot(2,2,1); % Viser opptil fire figurer i 2x2-mønster
% mesh(x,y,z) tegner opp et 3D-plott av z som funksjon av x og y
mesh(x,z,Ve);
% Kommandoen axis([a b c d e f]) setter aksene for 3D-plot slik:
% a < x < b, c < y < d, e < z < f
axis([-2 2 -2 2 -10 10]);
% Kommandoen caxis([zmin zmax]) setter fargeskalaen slik at blått
% tilsvarer zmin og rødt tilsvarer zmax
caxis([-10 10]);
xlabel('x/a'); % Tekst på aksene
ylabel('z/a');
zlabel('Ve');
```

Øving 6. Opg. 1 (Plotte V() med Matlab/Octave)



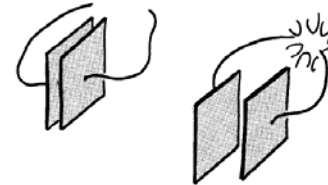
ENERGY IN A CAPACITOR

Consider a simple capacitor made of a pair of conducting plates in close proximity. Suppose the plates are appropriately charged + and - and then discharged to produce a spark. Next, the plates are charged again exactly as they previously were, only this time after being charged they are pulled farther apart. If they are then shorted out a second time, the spark produced will be

Flervalgsoppgaver fra «Thinking physics»:

<http://home.phys.nyu.edu/~brukdef/undervisning/ff4155/diverse/thinkingphysics/>

Konstant ladning Q
 Lavere kapasitans $C = \epsilon_0 A/d$
 \Rightarrow Høyere spenning $V = Q/C$
 \Rightarrow Mer energi $U = \frac{1}{2} QV$!



eller:
 Konstant ladning Q
 \Rightarrow Konstant felt $E = \sigma/\epsilon_0$
 \Rightarrow Konstant energitetthet $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$
 $\Rightarrow U = u \cdot (\text{volum})$ øker !

- a) bigger (liberate more energy) than the first spark
- b) smaller than the first spark
- c) the same size as the first spark

$V = E \cdot d$ øker også

• Noen av Støvnengs flervalgsoppgaver

14) En parallellplatekondensator består av to parallelle metallplater i innbyrdes avstand d . De to metallplatene har ladning henholdsvis Q og $-Q$. En metallskive med tykkelse $h = 2d/3$ settes inn midt mellom platene. Da blir potensialforskjellen mellom kondensatorplatene

- A ni ganger større.
- B tre ganger større.
- C tre ganger mindre.
- D ni ganger mindre.
- E uendret.

