

## Kap 28: Magnetiske kilder

- **Elektrostatikk:**  
Ladning  $q$  påvirkes av kraft  $qE$  (Coulombs lov)  
→ Definisjon  $E$ -felt  
 $E$ -feltet skapes fra ladninger (Coulombs lov)
- **Magnetostatikk:**  
Ladning  $q$  i **bevegelse** påvirkes av kraft  $qv \times B$   
→ Definisjon  $B$ -felt (Lorentzkrafta)  
 $B$ -feltet skapes fra ladninger i **bevegelse** (Biot-Savarts lov)
- **Hjelpelover:**  
Elektrostatikk: Gauss' lov  
Magnetostatikk: Amperes lov
- **Magnetiske materialer**  
Ferromagnetisk materiale. Magnetisering.  $M$ -vektor og  $H$ -vektor.

## Bevegelse av ladninger gir magnetfelt $B$

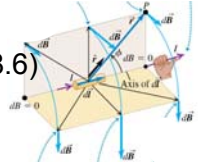
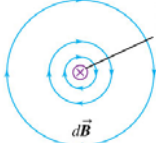
- Enkeltladning i bevegelse:
 
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{Enhetsvektor} \quad (28.2)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$
- Strøm i leder: (Biot-Savarts lov)
 
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{Enhetsvektor}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (28.6)$$

1819-25: Vitenskapelig arbeid:  
Hans Christian Ørsted, André Ampere,  
Jean-Baptist Biot, Felix Savart,  
Michael Faraday, Joseph Henry

## Bevegelse av ladninger gir magnetfelt $B$

- Enkeltladning: 
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad (28.2)$$
- Strømelement: 
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (28.6)$$

- Strøm i leder: (Biot-Savarts lov)
 
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{ledning}} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (28.7)$$


## Elmag og relativitetsteori i [Notat 3](#)

Einsteins utledning av spesiell relativitetsteori var drevet av dette problemet i elektromagnetismen:

Elektriske og magnetiske krefter er to sider av samme sak, avhengig av referansesystemet det hele observeres i.

Eks. 1 (Y&F Kap. 28.3):  
B-felt på midtnormal til rett leder

Forelesning:  
y → z  
x → rho

Biot-Savart: 
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

© 2012 Pearson Education, Inc. Y&F Figure 28.5

### Rottmann integraltabell (s. 137)

47)  $\int \frac{x}{X^{3/2}} dx = \frac{-1}{ac-b^2} \frac{bx+c}{\sqrt{X}} + C$

48)  $\int \frac{dx}{X^{3/2}} = \frac{1}{ac-b^2} \frac{ax+b}{\sqrt{X}} + C$

49)  $\int x(ax^2+c)^{k+1/2} dx = \frac{1}{(2k+3)a} (ax^2+c)^{k+3/2} + C, k \neq -\frac{3}{2}$

50)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+c}} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{c}} \ln C_1 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{ax^2+c}}{x}, & \text{for } c > 0; \\ \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{a}} \frac{1}{|x|} + C_2, & \text{for } c < 0 \text{ og } |x| \geq \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{a}} \end{cases}$

$X = ax^2 + 2bx + c$        $X = z^2 + \rho^2$ , dvs:  $\begin{matrix} x = z \\ a = 1 \\ b = 0 \\ c = \rho^2 \end{matrix}$

Rett leder lengde  $2a$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2a}{\rho} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} \hat{\phi} \quad (28.8)$$

Y&F Figure 28.5

Nærme rett leder ( $a \gg \rho$ ):

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho} \quad (28.9)$$

Y&F Fig. 28.6

Felt rundt uendelig lang, rett leder:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho}, \quad \mu_0 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$$

**Eksempler:**

- Under én kraftledning:  
 $I = 1 \text{ kA}, \rho = 100 \text{ m} \Rightarrow B = 2 \mu\text{T}$
- Nær f. eks. hårføner:  
 $I = 3 \text{ A}, \rho = 5 \text{ cm} \Rightarrow B = 12 \mu\text{T}$

Jordmagnetismen:  $B = 0,5 \text{ G} = 50 \mu\text{T}$  (statisk felt)

1) og 2) gjelder for enkeltledere:

For to ledere med motsatt strøm eller trefase blir B-feltet betydelig lavere.

**Statens strålevern**  
Norges atomenergi-regulering

Eksempler på magnetfelnivå ved høyspenninger:

Spenningsnivå (kilovolt)	Strømstyrke (Ampere)	Avstand i meter som gir 0,4 μT
22	150	15
22	200	18
66	200	20
66	300	25
132	300	35
132	400	40
300	450	60
300	650	70
420	800	85
420	1100	100

Tabellen viser eksempler på hvor langt fra nærmeste ledning magnetfeltet vil være nede i utredningsnivået 0,4 μT. Eksemplene gjelder vanlig planoppheng og er satt opp ut fra typiske gjennomsnittsverdier på strømstyrke i ledninger med ulike spenningsnivå.

Fra: <http://www.nrpa.no/strom-og-hovspent>

### Magnetfelt fra to parallelle ledere

(Ex. 28.4 i Y&F)

For  $r \gg d$ :  
B-felt avtar med  $1/r^2$ ,  
dvs. betydelig raskere enn for enkeltleder.

(Fig 28.7)

Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley.

### Utenfor koaksialkabel er B-feltet null!

Mer seinere, bl.a. oppgave i regneøving.

Y&F Fig. 28.8

**B-felt** rundt uendelig lang, rett leder:

$$B = \frac{1}{2\pi} \mu_0 \frac{I}{r}$$

Retning: asimutalt ( $\phi$ -retning)  
 $r$  = avstand fra ledere

**Sammenlikn med:**

**E-felt** rundt uendelig lang, ladd rett leder:

$$E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

Retning: radielt ( $r$ -retning)  
 $r$  = avstand fra ledere

### Kap 28: Magnetiske kilder

- Elektrostatikk:** 
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\hat{r}}{r^2} \quad (\text{Coulombs lov})$$
- Magnetostatikk:**
  - Enkeltladning: 
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad (28.2)$$
  - Strøm i leder: 
$$\vec{B} = \int_{\text{ledn.}} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{ledn.}} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (28.7) \text{ (Biot-Savart)}$$

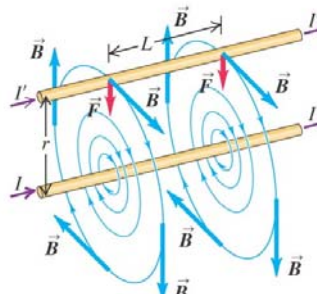
1819-25: Vitenskapelig arbeid:  
 Hans Christian Ørsted, André Ampere, Jean-Baptist Biot,  
 Felix Savart, Michael Faraday, Joseph Henry

- Eks. 1: Rett leder**
- 28.4 Definisjon 1 ampere**
- Eks. 2: Sirkulær sløyfe**

}
Neste uke

- Amperes lov**

### 28.4 Kraft mellom to parallelle ledere



$$F' = I_1 I_2 \mu_0 / (2\pi r)$$

**Definisjon 1 A:**  
 $2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m} = 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ A} \cdot \mu_0 / (2\pi \cdot 1 \text{ m})$

.. er i praksis definisjon av  $\mu_0$ :  
 $\mu_0 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$

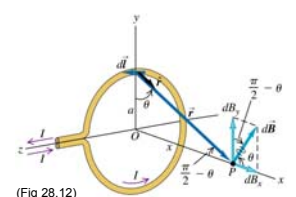
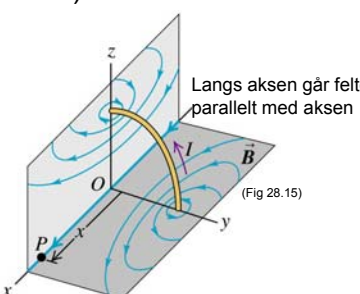
Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.  
Figure 28.9

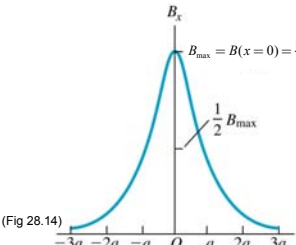
### Definisjon av 1 ampere (grunnenhet i SI-systemet)

- En ampere er den konstante elektriske strømmen som frambringer en gjensidig lineær kraft på  $2 \cdot 10^{-7}$  newton per meter leder når strømmen går gjennom hver av to rettlinjete, parallelle, uendelige lange ledere med sirkulært og neglisjerbart lite tverrsnitt, og lederne er anbrakt i én meters innbyrdes avstand i tomt rom.
- Det er sju SI-grunneheter:
 

meter	- lengde	Alle andre enheter er avledet fra disse, for eksempel $N = \text{kg m s}^{-2}$ $V = \text{J/C} = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-1}$ (se formelarket)
kilogram	- masse	
sekund	- tid	
ampere	- strømstyrke	
kelvin	- temperatur	
mol	- stoffmengde	
candela	- lysstyrke	

### Eks. 2: Feltet på akse i en sirkulær strømsløyfe: (kap 28.5)



$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i} \quad (28.15)$$

Rep fra forrige time:

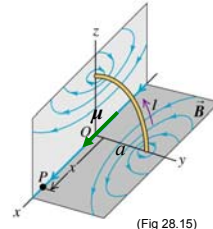
**Eks. 2: Feltet på akse i en sirkulær strømsløyfe**

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i} \quad (28.15)$$


Langt unna  $x \gg a$ :  $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3} \hat{i}$  □

sløyfas dipolmoment  $\mu = I\pi a^2$

Analogi:  
Langt unna elektrisk dipol:  
 $E(x) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{x^3} \hat{i}$



(Fig 28.15)

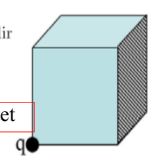


**Øving 9, flervalg:**

a) En punktladning  $q$  er plassert i det ene hjørnet av en kube. Hva blir elektrisk fluks gjennom den skraverte (høyre) sideflata i figuren?

A)  $q$                       D)  $q/8$   
 B)  $q/3$                     E)  $q/24$   
 C)  $q/4$

Elek. fluks = fluks til  $D$ -feltet  
 $\Phi = D \cdot A$



Young & Freedman, kap. 22.2:

If the area  $A$  is flat but not perpendicular to the field  $\vec{E}$ , then fewer field lines pass through it. In this case the area that counts is the silhouette area that we see when looking in the direction of  $\vec{E}$ . This is the area  $A_\perp$  in Fig. 22.6b and is equal to  $A \cos\phi$  (compare to Fig. 22.5b). We generalize our definition of electric flux for a uniform electric field to

$$\Phi_E = EA \cos\phi \quad (\text{electric flux for uniform } \vec{E}, \text{ flat surface}) \quad (22.1)$$

Since  $E \cos\phi$  is the component of  $\vec{E}$  perpendicular to the area, we can rewrite Eq. (22.1) as

$$\Phi_E = E_\perp A \quad (\text{electric flux for uniform } \vec{E}, \text{ flat surface}) \quad (22.2)$$

In terms of the vector area  $\vec{A}$  perpendicular to the area, we can write the electric flux as the scalar product of  $\vec{E}$  and  $\vec{A}$ :

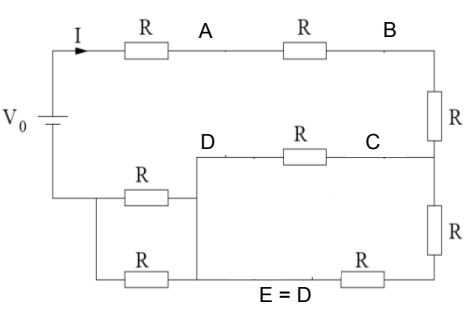
$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad (\text{electric flux for uniform } \vec{E}, \text{ flat surface}) \quad (22.3)$$

Elek. fluks = fluks til  $E$ -feltet  
 $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$

**Eksamen juni 2007, oppg. 3 a)**

Langt tid: Kondensatorer oppladd og kan "tas bort".

Finn  $I$ , samt  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$



$R = 1.0 \text{ M}\Omega$   
 $C = 1.0 \text{ nF}$   
 $V_0 = 1.25 \text{ kV}$

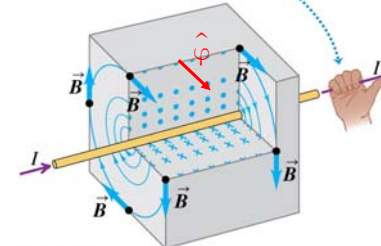
$E = D$

**Resultat i Eks. 1:**

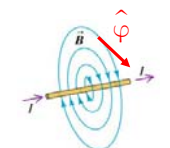
**B-felt** nærme rett leder (eller uendelig lang leder):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad (28.9)$$

Retning: asimutalt ( $\phi$ -retning)



© 2010 Pearson Education, Inc. Y&F Fig. 28.6



### Amperes lov

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

over lukka kurve, der  $I$  er totalstrøm innenfor kurva

(a)

(b)

(Fig 28.20)

Gjelder alle integrasjonsveger, men er nyttig kun i (sylinder)symmetriske konfigurasjoner. F. eks. rundt leder:  $B = \mu_0 I / 2\pi r$

### Eks. 4: Solenoide (mange sirkulære strømsløyfer)

Eks:  
 $N=400$   $l=0,10\text{m}$   
 $I=5,0\text{A}$   
 $\Rightarrow$   
 $B = 25 \text{ mT}$

**Reell  $B(x)$**

**Tilnærmet  $B(x)$**

Ser bort fra randeffekter:  
 Inni:  $B = \mu_0 I N / l$   
 Utafor:  $B = 0$

Større strøm gir oppvarming.

$E$  i parallellplatekondensator

$E=0$  utenfor

OK når  $d \ll \sqrt{A}$

$B$  i solenoide

$B=0$  utenfor

OK når  $2a \ll l$

Idealisert

Reelt

(Fig. 22.21a)

(Fig 28.22)

$|B|$  inni og utenfor en sylinderleder med uniform strøm  $I$

analog til

$B$  er asimutal

(Ex. 28.9)

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$  (for  $r < R$ )  
 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  (for  $r > R$ )

$|E|$  inni og utenfor en sylinder med uniform ladning  $\lambda$

$E$  er radiell

(≈Ex. 23.10)

$E = \lambda / (2\pi \epsilon_0) \cdot r / R^2$  (for  $r < R$ )  
 $E = \lambda / (2\pi \epsilon_0) \cdot 1/r$  (for  $r > R$ )

Feltet i toroid solenoide: (Ex. 28.10)

(Fig 28.25)

Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley

Path 1:  $I_{\text{incl}} = 0$   
 Path 2:  $I_{\text{incl}} = NI$   
 Path 3:  $I_{\text{incl}} = NI + N(-I) = 0$

curl  
 -- kan i vannstrøm demonstreres med et (infinitesimalt) padlehjul:

Curl. Eksempel:

$$\vec{B}(x, y, z) = [y, -x, 0] = y\hat{i} - x\hat{j}$$

Sylinderkoordinat:  $\vec{B}(r, \varphi, z) = -r\hat{\varphi}$

$$\text{curl } \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\text{curl } \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \hat{i} + 0 \cdot \hat{j} + \left( \frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) \hat{k} = -2\hat{k}$$

Atomære magnetiske moment  $\mu (= dm_i)$  i ytre magnetisk felt  $B$

ytte  $B_0 = 0$

ytte  $B_0 \neq 0$

Macroscopic  $\Delta v$

Microscopic base

Macroscopic  $\Delta v$

Paramagnetiske og ferromagnetiske: Innretning av magn.moment  $\mu$

### Tre typer magnetisk materiale:

Type	Effekt	Årsak: Ytre $H_0$ .....
Dia- magnetisk	$B$ -felt ↓	induserer magn.mom. $\mu$ med $\mu \parallel (-H)$
Para- magnetisk	$B$ -felt ↑	innretter permanente $\mu$ med $\mu \parallel H$
Ferro- magnetisk	$B$ -felt ↑↑↑↑↑↑↑↑	innretter permanente $\mu$ med $\mu \parallel H$ <b>Mange</b>

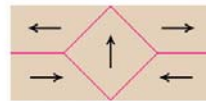
$$B = \mu_0 \mu_r H$$

TABLE 9-1 REPRESENTATIVE VALUES FOR PERMEABILITY  $\mu_r$  FOR SEVERAL MATERIALS

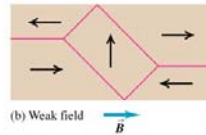
Material	Type	$\mu_r$
Bismuth	Diamagnetic	0.9999834
Silver	Diamagnetic	0.99998
Copper	Diamagnetic	0.999991
Vacuum	Nonmagnetic	1.00
Aluminum	Paramagnetic	1.00002
Nickel chloride	Paramagnetic	1.00004
Cobalt	Ferromagnetic	250
Nickel	Ferromagnetic	600
Mild steel	Ferromagnetic	2,000
Iron	Ferromagnetic	5,000
Mumetal	Ferromagnetic	100,000
Supermalloy	Ferromagnetic	800,000

$\mu_r$  avhengig  
 $H$  og tid  
(hysterese)

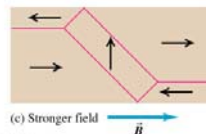
### Ferromagnetiske materialer



(a) No field



(b) Weak field



(c) Stronger field

Domener med magn.moment  $\mu$  i samme retning som ytre  $B$  vil vokse i størrelse

(Fig 28.27)

Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley

IUPAC Periodic Table of the Elements

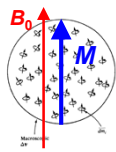
1										2										3										4										5										6										7										8										9										10																																																																																									
H										He										Li										Be										B										C										N										O										F										Ne																																																																																									
L										Be										B										C										N										O										F										Ne																																																																																																													
Na										Mg										Al										Si										P										S										Cl										Ar																																																																																																													
K										Ca										Sc										Ti										V										Cr										Mn										Fe										Co										Ni										Cu										Zn										Ga										Ge										As										Se										Br										Kr									
Rb										Sr										Y										Zr										Nb										Mo										Tc										Ru										Rh										Pd										Ag										Cd										In										Sn										Sb										Te										I										Xe									
Cs										Ba										La										Ce										Pr										Nd										Pm										Sm										Eu										Gd										Tb										Dy										Ho										Er										Tm										Yb										Lu																			
Fr										Ra										Ac										Th										Pa										U										Np										Pu										Am										Cm										Bk										Cf										Es										Fm										Md										No										Lr																			

Legend:  
Ferromagnetic  
Diamagnetic  
Paramagnetic

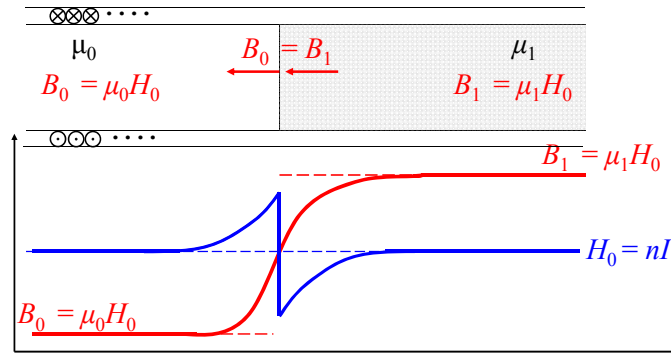


**Hva vi lærte forrige time:**

- Magnetisk feltstyrke:  $H = B/\mu_0$  (i tomrom)
- Magnetisering, definisjon:  $M = \sum \mu / \text{volum}$
- Magnetisering, eksperimentelt:  $M = \chi_m H$
- Totalt **B**-felt i magnetisk materiale:
  - $B = \mu_0 H + \mu_0 M$
  - $= \mu_0 H + \mu_0 \chi_m H$
  - $= \mu_0 \mu_r H$ , relativ permeabilitet:  $\mu_r = \chi_m + 1$
- Amperes lov på ny, enkel form:
  - $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \Rightarrow \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I$
  - $\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \Rightarrow \text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J}$



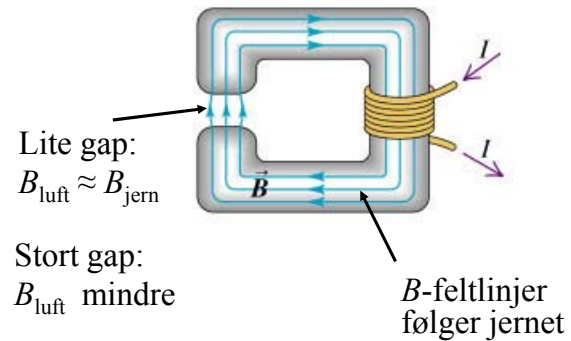
**Eks. 6B. Halvfylt solenoide**



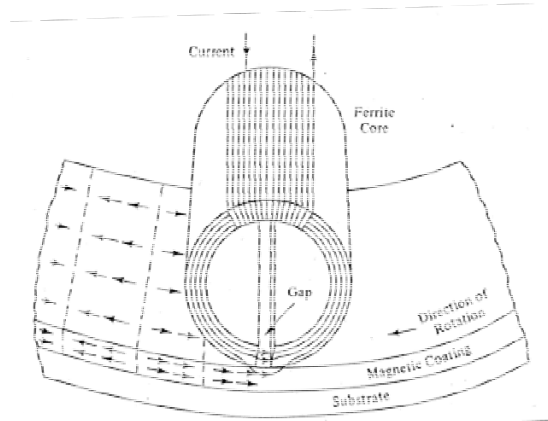
- Kontinuitetskrav over grenseflater (skille i  $\mu_r$ ):

- 1)  $B_{\perp}$  kontinuerlig
- 2)  $H_{\perp}$  diskontinuerlig (faktor  $\mu_r$ )
- 3)  $H_{\parallel}$  kontinuerlig
- 4)  $B_{\parallel}$  diskontinuerlig (faktor  $\mu_r$ )

**Eks. 7 Luftgap i magnet**



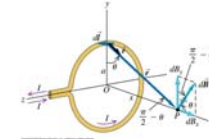
Magnetgap til bruk for å skrive på harddisk, video og lignende



## Kap. 28: Oppsummering: Kilde til magnetisk felt

- Bevegelse av ladninger er kilde for magnetfelt  $\vec{B}$ .
  - Enkeltladning i bevegelse:  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \times \hat{r}}{r^2}$

- Strøm i leder:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$



- Magnetfelt  $\vec{B}$  kan finnes ved integrasjon over leder fra Biot-Savarts lov  
-- eller ved bruk av:
- Amperes lov:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

der  $I$  er strøm innenfor den lukkede integrasjonsvegen.

$$\text{Differensialform: } \text{curl } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\text{curl } \vec{H} = \vec{J}$$

- Viktige anvendelser: Rett leder, solenoide, m.m.

## Kap. 28: Oppsummering: Magnetiske materialer

- Materialer kan magnetiseres:  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ 
  - Diamagnetiske:  $\chi_m$  liten, negativ
  - Paramagnetiske:  $\chi_m$  liten, positiv
  - Ferromagnetiske:  $\chi_m$  **stor** positiv
- Strømsløyfer skaper magnetisk feltstyrke  $\vec{H}$  og flukstetthet:
 
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$
 .. altså avhengig av relativ permittivitet  $\mu_r$  og dermed av materialet
- I alle tidligere formler kan vi erstatte  $\mu_0$  med  $\mu = \mu_0 \mu_r$
- Kontinuitetskrav over grenseflater (skille i  $\mu_r$ ):
 
$$B_{\perp} \text{ kontinuerlig} \quad B_{\parallel} \text{ diskontinuerlig}$$

$$H_{\perp} \text{ diskontinuerlig} \quad H_{\parallel} \text{ kontinuerlig}$$