 TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme

Notat 1: Dielektrikum og polarisering

En del viktige begrep som ofte brukes i forbindelse med dielektriske materialer nevnes i læreboka (Young & Freedman, Ed. 11 = Y&F) i kapittel 24-4, 24-5 og 24-6, men en presentasjon av størrelser unnlates å ta med. Alle som studerer elektromagnetisme bør ha hørt om dem, derfor foreleses noe utover boka. Dette gjelder f.eks. begrepene elektrisk polarisering $\vec{P}$ og elektrisk flukstetthet $\vec{D}$. Kapittel 20.5 i den norske læreboka Lillestøl, Hunderi og Lien går omtrent så langt som i forelesningene. Spesielt henvises til regneøving nr. 7. A. Mikkelsen 3. feb. 2012.

Oppsummering av definisjoner og noen likninger:

$\vec{P}$ = elektrisk polarisering ("electric polarization"), også kalt dipoltetthet fordi den kan defineres: $\vec{P} = \dfrac{N\vec{p}}{\tau}$, der N er antall dipoler $\vec{p}$ i volumet τ. I Y&F brukes symbolet σ_i. Enhet: $[P] = \mathrm{C/m^2}$

χ_e = elektrisk susceptibilitet. Definert ved $\vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E}$ ($\vec{P}$ øker proporsjonalt med $\epsilon_0\vec{E}$).
Enhet: $[\chi_\mathrm{e}] = 1$ (dimensjonsløs)

ϵ = elektrisk permittivitet. Definert ved $\epsilon = (1+\chi_\mathrm{e})\epsilon_0$, der ϵ_0 er tomromspermittiviteten ($\chi_\mathrm{e} = 0$ i tomrom).
Enhet: $[\epsilon] = \mathrm{C^2/Nm^2} = \mathrm{F/m}$.

ϵ_r = relativ permittivitet (også kalt dielektrisitetskonstanten), definert $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = 1+\chi_\mathrm{e}$. I Y&F brukes navnet "dielectric constant" og symbolet K. Størrelsen χ_e brukes ikke i Y&F, men er bortgjemt som $K-1 = \epsilon_r - 1$.
Enhet: $[\epsilon_r] = 1$ (dimensjonsløs, dvs. et tall).

$\vec{D}$ = elektrisk flukstetthet. Også kalt elektrisk forskyvningsvektor, men flukstetthet er et standardisert og dessuten mye bedre navn og harmoniserer med tilsvarende størrelse i magnetismen (magnetisk flukstetthet B). Definert ved $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, og det er mange alternative uttrykk: $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\vec{E} + \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E} = \epsilon_0(1+\chi_\mathrm{e})\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon\vec{E}$.

Gauss' lov (intergralform) på ulike former

Gauss' lov med elektrisk flukstetthet blir

$$\oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q \tag{1}$$

der Q er alle frie ladninger innenfor den lukkede Gaussflata. Iblant noteres høyre side Q_encl for å presisere ladninger innenfor Gaussflata. Og iblant også $Q_\mathrm{encl,fri}$ for å presisere at det er frie ladninger, men i forelesningene og ellers i elmagen forstås med Q (og romladninger ρ, flateladninger σ osv.) uten indeks, alltid frie ladninger.

Loven gjelder både for fritt rom, ledere og dielektrika. Dersom vi setter inn $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ får vi:

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon} \tag{2}$$

med spesialtilfellet i luft (vakuum) når $\epsilon = \epsilon_0$, som vi har regnet på utallige ganger.

Med Q_i lik induserte ladninger blir Gauss' lov for elektrisk polarisering (merk minustegnet)

$$\oint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i}\,. \tag{3}$$

Setter vi inn sammenhengen $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ i likning (1), finner vi

$$Q = \oint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \oint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon_0\frac{Q}{\epsilon} - Q_\mathrm{i}\,.$$

Siden Q er fri ladning kan $\epsilon_0\dfrac{Q}{\epsilon} = Q + Q_\mathrm{i} = Q_\mathrm{tot}$ betraktes som *total* ladning. Gauss' lov for total ladning vil fra likning (2)$\cdot\epsilon_0$ lyde

$$\oint \epsilon_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon_0\frac{Q}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon_\mathrm{r}} = Q_\mathrm{tot}\,. \tag{4}$$

På denne formen (som er lite brukt) skal det stå $\epsilon_0\vec{E}$ både for vakuum og dielektriske media.

Gauss' lov (differensialform) på ulike former

Likningene (1)-(4) vil på differensialform lyde

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon \qquad \mathrm{div}\vec{P} = -\rho_\mathrm{i} \qquad \mathrm{div}\,\epsilon_0\vec{E} = \rho_\mathrm{tot} = \rho + \rho_\mathrm{i} \tag{5}$$