

Øving 4

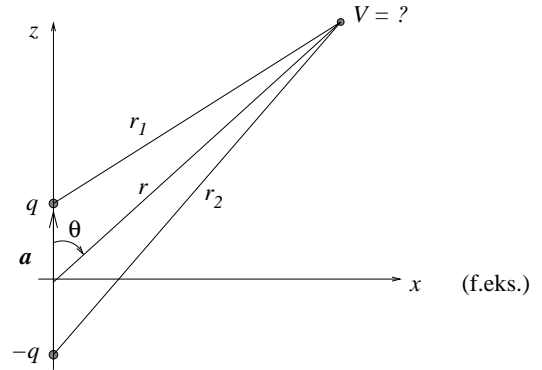
Elektrisk potensial og Gauss' lov.

Veiledning: 11. og 12. feb. ifølge nettsider.

Innlevering: Onsdag 13. feb. kl. 14:00

Oppgave 1. Potensial rundt elektrisk dipol.

En elektrisk dipol som består av to punktladninger $\pm q$, er plassert langs z -aksen med sentrum i origo, som vist i figuren. Det elektriske *dipolmomentet* er da $\vec{p} = q\vec{a}$, der $\vec{a} = a\hat{z}$ er vektoren fra $-q$ til q .



Siden vi her opplagt må ha *symmetri* med hensyn til rotasjon omkring z -aksen, er det tilstrekkelig å se på forholdene i et halvplan som inneholder z -aksen, f.eks. xz -planet, med $x > 0$.

Vi kan videre velge mellom kartesiske koordinater (x, z) eller polarkoordinater (r, θ) for å angi en vilkårlig posisjon i dette planet. Vi skal se på begge deler i denne oppgaven. Vinkelen θ kan vi selvsagt velge i forhold til hvilken kartesisk akse vi vil; her lar vi θ være vinkelen som \vec{r} danner i forhold til z -aksen (se figuren).

a) Bestem først sammenhengen mellom de kartesiske koordinatene og polarkoordinatene, dvs. $x(r, \theta)$, $z(r, \theta)$ og $r(x, z)$.

b) Vis at potensialet fra en slik dipol i kartesiske koordinater blir

$$V(x, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a/2)^2}} \right).$$

c) Hva blir potensialet på x -aksen, $V(x, 0)$?

d) Hva blir potensialet på z -aksen, $V(0, z)$? (På *hele* z -aksen; pass på fortegnene...!) Skisser funksjonen $V(0, z)$.

e) Vis at i stor avstand fra dipolen (dvs $r \gg a$) er potensialet med god tilnærming gitt i polarkoordinater ved

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

TIPS: Skriv om

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

og bruk figuren til å finne et tilnærmet uttrykk for dette når $r \gg a$.

f) Mens potensialet fra en enkelt punktladning avtar som $1/r$, avtar altså potensialet fra en dipol *raskere*, nemlig som $1/r^2$. Har du noen kommentarer til om dette er rimelig?

Kommentar: For den som insisterer på en mer rigid matematisk tilnærming til denslags, er det her snakk om å bestemme $V(r, \theta)$ "til ledende orden" i den "lille parameteren" a/r . Med andre ord, det oppgitte uttrykket for $V(r, \theta)$ er *eksakt* for en såkalt *ideell dipol* med "null utstrekning" (dvs $a \rightarrow 0$).

— forts. neste side

Oppgave 2. To kuleskall.

To svært tynne, konsentriske, metalliske kuleskall har radier henholdsvis R og $\frac{3}{2}R$. Det indre skallet har ladningen q , og det ytre skallet har ladningen $-3q$.

- Finn uttrykk for det elektriske feltet $\vec{E}(r)$ i alle deler av rommet.
- Hva er potensialdifferansen mellom skallene?
- Hvordan vil ladningen fordele seg dersom de to skallene forbindes med en tynn ledende tråd?

Oppgave 3. Kule med gitt $Q(r)$.

Ei kule med radius R har en ladningfordeling slik at ladningen $Q(r)$ innenfor radius r er gitt ved

$$Q(r) = 4\pi\rho_0 \left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{R}r^4 \right) \quad \text{for } r \leq R$$

Den totale ladningen for kula er således

$$Q_0 = Q(R) = \frac{4\pi}{3}R^3\rho_0,$$

hvor vi ser at ρ_0 er gjennomsnittsverdien av $\rho(r)$ i kula. Utenfor kula er det ladningsfritt.

- Bestem det elektriske feltet utenfor kula ($r > R$) og inne i kula ($r \leq R$).
- Bestem det elektriske potensialet $V(r)$ utenfor kula og inne i kula. Sett referansepunktet ved $r \rightarrow \infty$, dvs. $V(\infty) = 0$.
- Er potensialet kontinuerlig ved overflata av kula ($r = R$)?
- Finn uttrykk for romladningstettheten $\rho(r)$ for $r \leq R$.
- Bruk Matlab el.l. til å lage vise grafer av ρ, Q, E og V . Plot i et og samme koordinatsystem for $0 < r/R < 3/2$.
Velg dimensjonsløse variable: $\frac{\rho(r/R)}{4\rho_0}$, $\frac{Q(r/R)}{\frac{4\pi\rho_0}{3}R^3}$, $\frac{E(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R}$ og $\frac{V(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R^2}$.

Utvalgte fasitsvar:

2b) $-q/(12\pi\epsilon_0 R)$,

3a) $E(r < R) = \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0} (4r/R - 3r^2/R^2)$, 3b) $V(r < R) = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} \left[2 - 2r^2/R^2 + \frac{r^3}{R^3} \right]$, 3d) $4\rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)$.