

## Kap. 24 Kapasitans og dielektrika

- Grunnleggende forståelse for
  - HVA en kondensator er,
  - HVORFOR den virker som den gjør,
  - hvilke BEGRENINGER den har og
  - hvorfor et DIELEKTRIKUM er påkrevd i en kondensator.
- Kapasitans
- Energi i kondensatorer og ladningssamlinger generelt
- Beskrive et dielektrikum:
  - polarisering  $P$ ,
  - elektrisk flukstetthet  $D$ ,
  - relativ permittivitet  $\epsilon_r$ ,
  - Gauss' lov for dielektrika.

Små kondensatorer



og store kondensatorer..

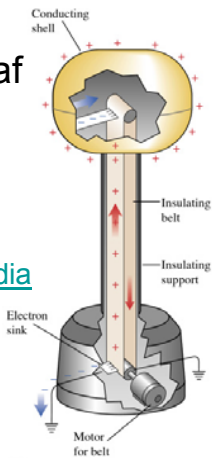


Fra Wikipedia: <http://en.wikipedia.org/wiki/Capacitor>

### Van de Graaf generator

Y&F fig 22.27

Se også [Wikipedia](#)



Oppgitt overslagsspenning	
kV	ved cm
30	1
55	2
80	3
100	4
125	5,5

**Coronautlading ved**  
 $E_{\max} = 30 \text{ kV/cm}$  på overflata  
 $\Rightarrow V_{\max} = E_{\max} R = 300 \text{ kV}$


Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley.

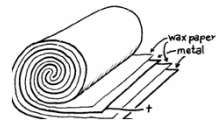
### Van de Graaf-generator i Gamle fysikk, 1952

Forskning i kjernefysikk.  
 Opptil 2000 kV  
 Kulediameter ca 60 cm  
 høytrykkskammer rundt

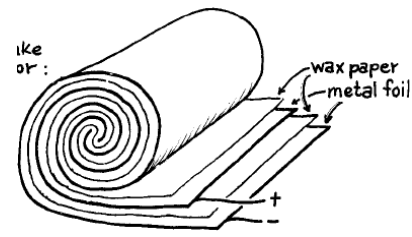



### Kap. 24 Kapasitans og dielektrika

- Kondensatorer = to ledere som kan lagre ladning
- Kapasitans:  $C = Q/V$  (enhet F = farad)
  - der  $V = V_2 - V_1$  for to ledere (Type A)
  - eller  $V = V - V_\infty$  for enkeltleder (Type B)
- Eks. 1: Enkeltkule:  $C = 4\pi\epsilon_0 R$
- Eks. 2: Parallellplatekondensator  $C = \epsilon_0 A/d$
- Eks. 3: Kulekondensator 
 $C = 4\pi\epsilon_0 r_b r_a / (r_b - r_a)$   
 $\rightarrow 4\pi\epsilon_0 r_a$  når  $r_b \rightarrow \infty$
- Eks. 4: Sylinderkondensator (koaxskabel)
- Seriekopling og parallellkopling
- Uttrykk for energi i kondensatorer
- Dielektriske materialer: Elektrisk polarisering  $P$
- Elektrisk flukstetthetsvektor:  $D$
- Gauss' lov for dielektrika.



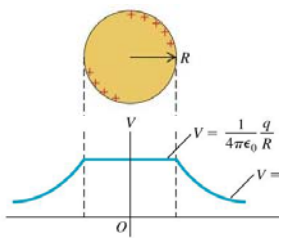
Parallellplatekondensator:  $C = \epsilon_0 A/d$



Hvor stort areal for 1F – kondensator hvis  $d = 0,1 \text{ mm}$  ?

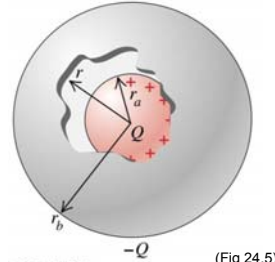
$$A = C d / \epsilon_0 = 1 \text{ F} \cdot 0,1 \text{ mm} / 9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 11 \text{ km}^2 \quad !!$$

Eks. 1: Enkeltkule (ladning  $q$ )  
Type B



$C = 4\pi\epsilon_0 R$

Eks. 3: Kulekondensator  
Type A = to kuleskall med ladning  $+Q$  og  $-Q$   
=Ex. 24.3



(Fig 24.5)

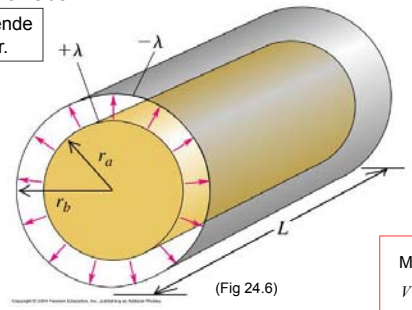
$$C = 4\pi\epsilon_0 r_b r_a / (r_b - r_a)$$

$$\rightarrow 4\pi\epsilon_0 r_b r_a / r_b$$

$$= 4\pi\epsilon_0 r_a \quad \text{når } r_b \rightarrow \infty$$

Eks. 4: **Sylinderkondensator** = Y&F Ex. 24.4  
 = to sylinderskall med ladning  $+\lambda$  og  $-\lambda$  (C/m)  
 = koaxskabel

Utregnes helt tilsvarende som kulekondensator.



(Fig 24.6)

Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_r \frac{q_i}{r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dq}{r}$$

Metode 2:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- 1) Finn  $E_r$
- 2) integrer og finn  $V(r)$  (Metode 2) ( $\approx$  Eks 9 Kap 23)
- 3) finn kapasitansen  $C = Q/V_{ab}$

### Uttrykk kapasitans

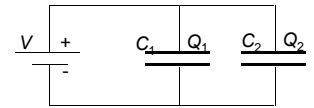
$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot (\text{geometrifaktor})$$

enhet: meter

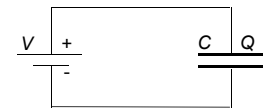
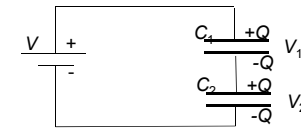
- Koaksialkondensator:  $C = \epsilon_r \epsilon_0 2\pi \ln(r_b/r_a) \cdot l$
- Parallellplatekondensator:  $C = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot A/d$
- Kulekondensator:  $C = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r_b r_a / (r_b - r_a)$   
 $\rightarrow \epsilon_r \epsilon_0 \cdot 4\pi \cdot r_a$  når  $r_b \rightarrow \infty$

### Kondensatorer:

i parallell



i serie



$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$CV = C_1V + C_2V$$

V lik for alle =>

$$C = C_1 + C_2 = \Sigma C_i$$

$$V = V_1 + V_2$$

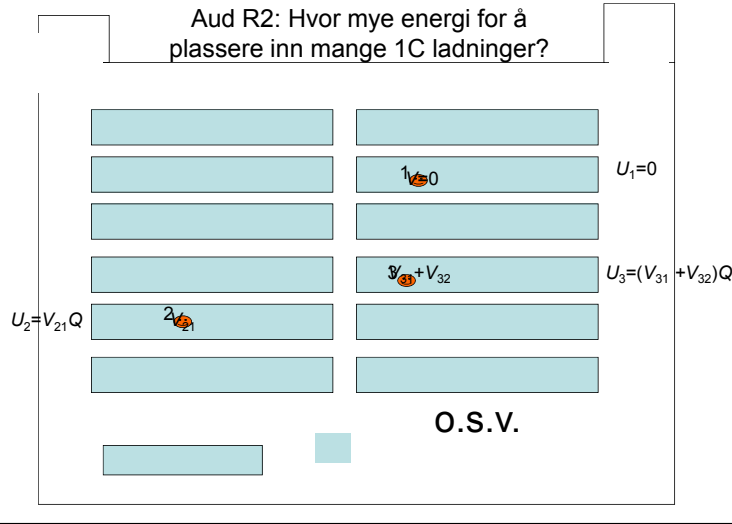
$$Q/C = Q/C_1 + Q/C_2$$

Q lik for alle =>

$$1/C = 1/C_1 + 1/C_2 = \Sigma 1/C_i$$

2 kond:  $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$

Aud R2: Hvor mye energi for å plassere inn mange 1C ladninger?

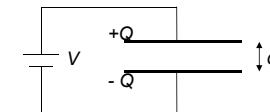


### Øking av avstand d i platekondensator:

$$\Rightarrow C = \epsilon_0 A/d \text{ avtar}$$

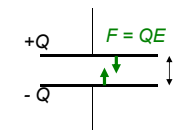
1. Tilkopla batteri:

- V konstant
- Q = CV avtar
- E avtar
- U = 1/2 QV avtar (gis til batteriet)



2. Frakopla batteri:

- Q konstant
- V = Q/C øker
- E konstant
- U = 1/2 QV øker (tilføres fra ytre kraft)



## Elektrisk energi

1. Uttrykt med ladning og potensial:

$$U = \frac{1}{2} V Q = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q^2 / C \quad (24.9)$$

(utledet for kondensator; all  $Q$  på samme  $V$ )

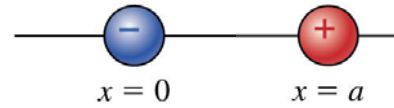
$$U = \frac{1}{2} \int V dq \quad (24.9C)$$

(ulike  $dq$  på ulike  $V$ )

## Kap 23, eks. 2. Presiseringer

Energiberegning under oppbygging:

$$q_1 = -e \quad q_2 = +e$$



$$\begin{aligned} & q_1 \text{ først, så } q_2: \\ U &= U_1 + U_2 \\ &= 0 + q_2 k q_1 / a \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & q_2 \text{ først, så } q_1: \\ U &= U_2 + U_1 \\ &= 0 + q_1 k q_2 / a \end{aligned}$$

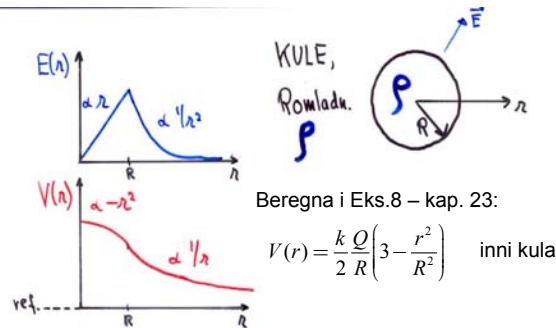
Ferdig oppbygd:	ved potensial	energi
$q_1$	$V_1 = k q_2 / a$	$q_1 V_1 = q_1 k q_2 / a$
$q_2$	$V_2 = k q_1 / a$	$q_2 V_2 = q_2 k q_1 / a$
	<b>Sum:</b> $\sum q_i V_i = 2 q_2 k q_1 / a$	<b>Regnet dobbelt!</b>

### Konklusjon:

Energi beregnet fra potensial i ferdig oppbygd ladning:  $U = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$

Brukes i Øving 5, oppgave 2 a)

## Eks.5: Energi for homogent ladd kule



Beregna i Eks.8 – kap. 23:

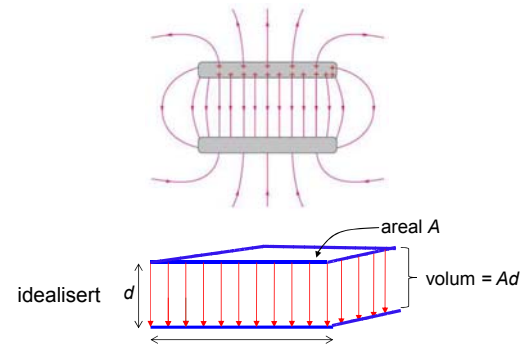
$$V(r) = \frac{k Q}{2 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{inni kula}$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint V(r) dq \quad (24.9C)$$

OBS:  $dq = 0$  utenfor kula

$$= \frac{3}{5} \frac{k Q^2}{R}$$

## Energi $U$ uttrykt med $E$ -feltet



$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Ad$$

$$u = U/\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

## Elektrisk energi

1. Uttrykt med ladning og potensial:

$$U = \frac{1}{2} \int V dq \quad (= \frac{1}{2} V Q = \frac{1}{2} C V^2) \quad (24.9C)$$

2. Uttrykt med elektrisk felt:

$$U = \int u d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 d\tau \quad (24.11B)$$

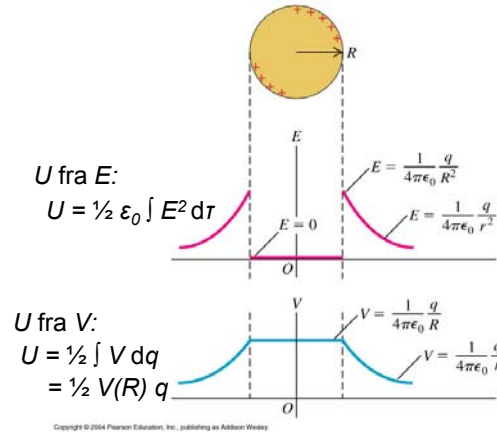
Hvor er energien lagra:

I **ladningene** eller i det **elektriske feltet**?

På platene eller **mellom** platene?

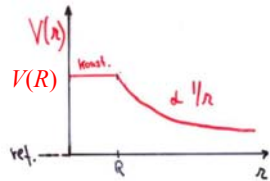
To uttrykk for **SAMME energi!**

### Eks. 6: Energi på lederkule med ladning $q$



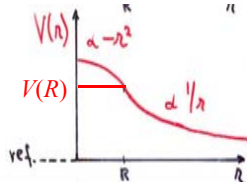
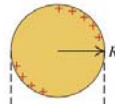
### Eks.5+6

$$U = \frac{1}{2} \iiint V(r) dq$$



Eks.6: Ladd lederkule:

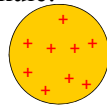
$$U = \frac{1}{2} kq^2/R$$



Eks. 5: Homogent ladd kule:

$$U = \frac{3}{5} kq^2/R$$

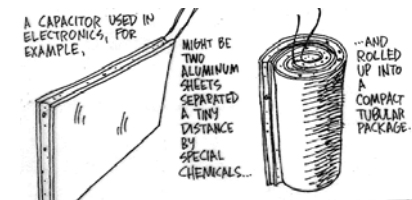
$$= \frac{6}{5} \cdot U_{\text{ladd lederkule}}$$



## Dielektrika og elektrisk polarisering

### Materialer:

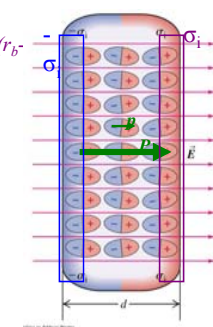
- Vakuum
- Ledere
- Dielektrikum



- Mellom plater i kondensator brukes alltid et dielektrikum
- Kapasitansen øker da med en faktor  $\epsilon_r$ .

### Kap. 24 Kapasitans og dielektrika

- Gjennomgått:**
- Kondensatorer = to ledere som kan ta opp ladning
- Kapasitans:  $C = Q/V$  (farad), med eksempler:
  - » Enkeltkule:  $C = 4\pi\epsilon_0 r_a$
  - » Parallellplate:  $C = \epsilon_0 A/d$
  - » Kulekondensator:  $C = 4\pi\epsilon_0 r_a r_b / (r_b - r_a)$
- Seriekopling og parallellkopling
- Energi i kondensatorer  $U = \frac{1}{2} VQ = \frac{1}{2} C V^2$
- Energi i ladningssamlinger  $U = \frac{1}{2} \int Vdq$   
 $U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 d\tau$
- Videre:**
- Dielektriske materialer:  
Elektrisk polarisering  $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$
- Elektrisk flukstetthetsvektor:  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$
- Gauss' lov for dielektrika:  
Noen anvendelser/eksempler

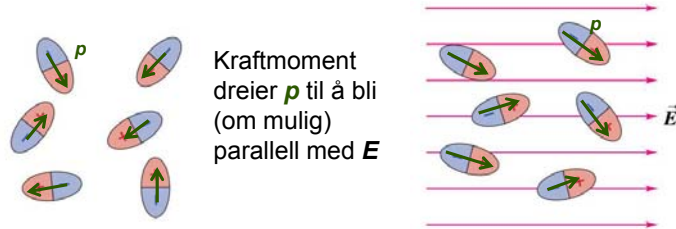


(fig 24.20)

### Kraftmoment dipol:

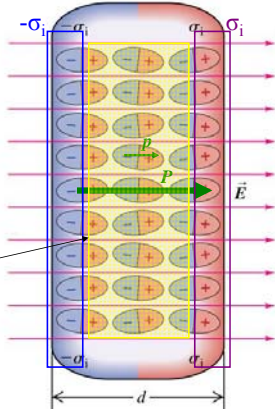
$$\vec{\tau} = \vec{d}/2 \times q\vec{E} + (-\vec{d}/2) \times (-q\vec{E})$$

$$= q\vec{d} \times \vec{E}$$

$$= \vec{p} \times \vec{E}$$


Kraftmoment dreier  $\mathbf{p}$  til å bli (om mulig) parallell med  $\mathbf{E}$

### Innretting (polarisering) gir flateladning $\sigma_i$ (i = induert ladning)



$\mathbf{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1)$

$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3)$

El. nøytralt innenfor her

Relative Permittivity  
~~Dielectric Constant  $\kappa$~~

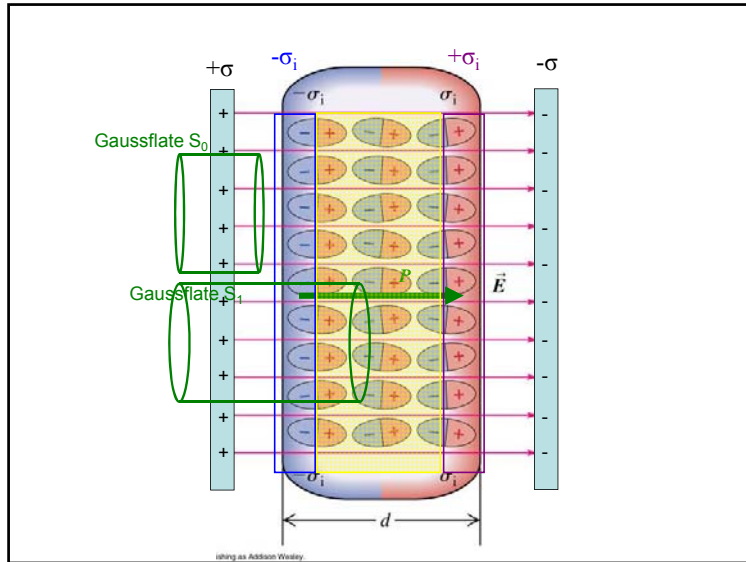
**Table 24.1** Values of ~~Dielectric Constant  $\kappa$~~  at 20°C

Material	<del><math>\kappa</math></del> $\epsilon_r$	Material	<del><math>\kappa</math></del> $\epsilon_r$
Vacuum	1	Polyvinyl chloride	3.18
Air (1 atm)	1.00059	Plexiglas	3.40
Air (100 atm)	1.0548	Glass	5-10
Teflon	2.1	Neoprene	6.70
Polyethylene	2.25	Germanium	16
Benzene	2.28	Glycerin	42.5
Mica	3-6	Water	80.4
Mylar	3.1	Strontium titanate	310

Relative permittivity  
~~Dielectric Constant  $\kappa$~~  and Dielectric Strength of Some Insulating Materials

**Table 24.2**

Material	Constant, <del><math>\kappa</math></del> $\epsilon_r$	Dielectric strength $E_m$ (V/m)
Polycarbonate	2.8	$3 \times 10^7$
Polyester	3.3	$6 \times 10^7$
Polypropylene	2.2	$7 \times 10^7$
Polystyrene	2.6	$2 \times 10^7$
Pyrex glass	4.7	$1 \times 10^7$
Luft:		$3 \times 10^6$



## Gauss' lov

- Integralform:  $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q$   $\Phi = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = q$
- Differensialform:  $\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$   $\text{div} \vec{D} = \rho$

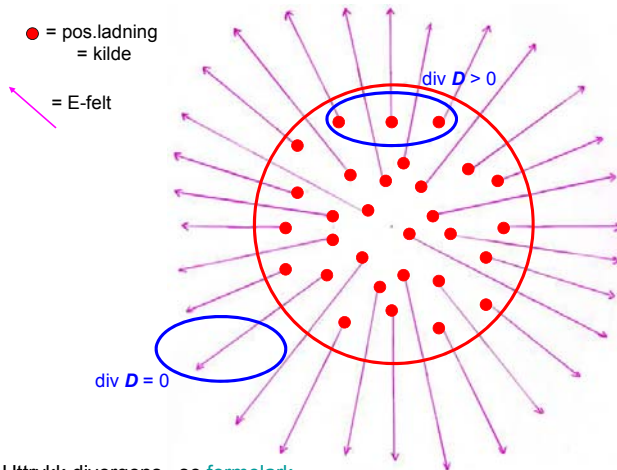
$\text{div} \vec{D} =$  divergensen til  $\vec{D}$

$$\text{div} \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = [\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z] \cdot \vec{D}$$

divergens = kilde

• = pos.ladning  
= kilde

↖ = E-felt



Uttrykk divergens, se [formelark](#)

## Gauss' lov:

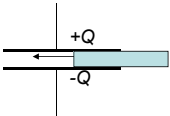
- Gauss' lov for fri ladning  $Q$ :  $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$  (12) Mest praktiske  
eller  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q / \epsilon$
- Gauss' lov for indusert ladning  $Q_i$ :  $\oiint \vec{P} \cdot d\vec{A} = -Q_i$  (11)
- Gauss' lov for totalladning  $Q_{\text{tot}}$ :  $\oiint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{tot}}$  (10)  
 $Q_{\text{tot}} = Q + Q_i$

- I alle tidligere formler kan  $\epsilon_0 \vec{E}$  erstattes av  $\epsilon \vec{E}$ , dvs.  $\epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$
- $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$

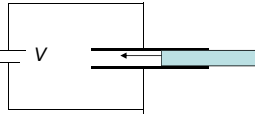
Øving 7 !!

### Eks. 7 Parallellplatekondensator uten og med dielektrikum

**A. Frakopla batteri:**  
**Konstant:**  $\sigma = D = Q/A$   
 Avtar:  $V_1 = V_0/\epsilon_r$   
 Øker:  $C_1 = Q/V_1 = \epsilon_r C_0 = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$   
 Energi:  $U_1 = \frac{1}{2} QV_1$  **avtar**



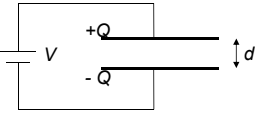
**B. Tilkopla batteri:**  
**Konstant:**  $V_1 = V_0$   
 Øker:  $\sigma_1 = D_1 = Q_1/A = \epsilon_r D_0$   
 Øker:  $C_1 = Q/V_1 = \epsilon_r C_0 = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$   
 Energi:  $U_1 = \frac{1}{2} QV_1$  **øker**  
 (tilføres fra batteriet)



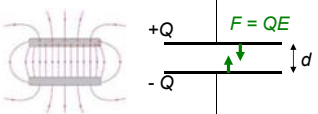
### Øking av avstand $d$ i platekondensator:

$\Rightarrow C = \epsilon_0 A/d$  avtar

**1. Tilkopla batteri:**  
**V konstant**  
 $Q = CV$  avtar  
 $E$  avtar  
 $U = \frac{1}{2} QV$  **avtar**  
 (gis til batteriet)



**2. Frakopla batteri:**  
**Q konstant**  
 $V = Q/C$  øker  
 $E$  konstant  
 $U = \frac{1}{2} QV$  **øker**  
 (tilføres fra ytre kraft)



**Beregning fra arbeid:**  $\Delta U = F \Delta d = QE \Delta d$

### Kap. 24: Oppsummering 1 Kondensatorer og kapasitans

- Kondensatorer = to ledere som kan ta opp ladning
- Kapasitans:  $C = Q/V$  (farad)
- Enkeltkulekondensator:  $C = 4\pi\epsilon_0 R$  (Eks. 1)
- Parallellplatekondensator:  $C = \epsilon_0 A/d$  (Eks. 2)
- Kule(skall)kondensator:  $C = 4\pi\epsilon_0 r_a r_b / (r_b - r_a)$  (Eks. 3)
- Sylinderkondensator (koaks-kabel):  $C' = 2\pi\epsilon_0 \ln r_b / r_a$  (Eks. 4)
- Parallellkopling:  $C = C_1 + C_2$  Seriekopling:  $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$
- Energi ved ladning og potensial:  $U = \frac{1}{2} \int V dq$
- Energi ved elektrisk felt:  $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  dvs.  $U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 d\tau$ 
  - For kondensator gir dette:  $U = \frac{1}{2} VQ = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} Q^2/C$

### Kap. 24: Oppsummering 2 Dielektrika og polarisering

- Dielektriske materialer:**
- Elektrisk polarisering = dipoltetthet:  $\mathbf{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}$ 
  - der  $\chi_e$  er elektrisk susceptibilitet.
  - Relativ permittivitet  $\epsilon_r = \chi_e + 1$  (dielektrisitetetskonstant)
- Elektrisk flukstetthetsvektor:  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$  (forskyvningsvektor)
- Elektrisk fluks:  $\Phi = \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$
- Gauss' lov for fri ladning  $Q = Q_{tot} - Q_i$ :  
 $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q$  eller  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q / \epsilon$
- Gauss' lov for induert ladning  $Q_i$ :  $\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = -Q_i$
- Gauss' lov for totalladning  $Q_{tot}$ :  $\oint \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q_{tot}$
- I alle tidligere formler kan  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  erstattes av  $\epsilon \mathbf{E}$ , dvs.  $\epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$
- Mer utfyllende i [Notat1: Dielektriske materialer.](#)



## Spesielle dielektrika:

- Piezoelektriske materialer:  
Mekanisk strekk eller trykk → polarisasjon  $P$   
(eller motsatt)  $E$ -felt →  $P$ -felt → deformasjon  
Bruk: Kvartskrystaller, mikrofoner, pickup (platespillere "vinyl")
- Electrets og ferroelektriske materialer:  
Materialer med permanent polarisasjon  $P$   
(tilsvarer permanente magneter)
- Overslag ("breakdown"):  
Overslag i dielektrika ved viss angitt grense ("dielectric strength")  
Kondensatorer har oppgitt max spenning!

$P = \chi_e \cdot \epsilon_0 E$

$\epsilon_r = \chi_e + 1$

$\chi_e$	$\epsilon_r = \chi_e + 1$
1/3	4/3
1	2
3	4
$\infty$	$\infty$

$D = \epsilon_0 E + P$   
endres ikke  
(ingen endring  
frie ladn.)

(# flukslinjer  $P$ ) =  $\chi_e \cdot$  (# flukslinjer  $\epsilon_0 E$ )

$$D = \epsilon_0 E + 0 = D = \epsilon_0 E + P = D = \epsilon_0 E + 0$$

avtar   øker

$$D = 1 \cdot \epsilon_0 E = D = \epsilon_r \epsilon_0 E = D = 1 \cdot \epsilon_0 E$$

$$P = \chi_e \cdot \epsilon_0 E$$

der  $E$  er inni dielektriket, ikke ytre

### Øving 6. Opg. 1 (Plotte V() med Matlab/Octave)

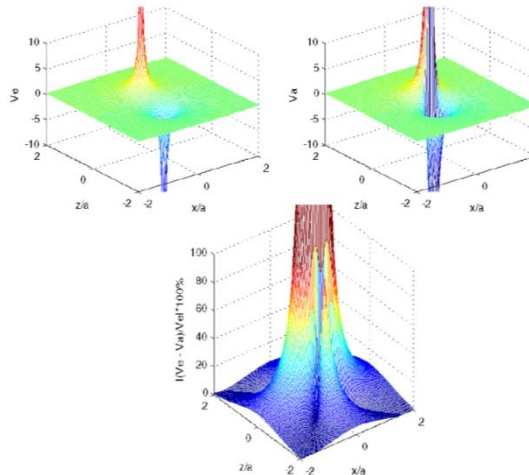
Definer og bruk dimensjonsløse variable i all numerisk analyse!

```
% Velg området -2 < x < 2 og -2 < z < 2 for plotting, ca 100 x 100 punkter i alt
[x,z] = meshgrid(-2 : 2/50 : 2, -2.01 : 2/50 : 2);
```

...

```
subplot(2,2,1); % Viser opptil fire figurer i 2x2-mønster
% mesh(x,y,z) tegner opp et 3D-plott av z som funksjon av x og y
mesh(x,z,Ve);
% Kommandoen axis([a b c d e f]) setter aksene for 3D-plot slik:
% a < x < b, c < y < d, e < z < f
axis([-2 2 -2 2 -10 10]);
% Kommandoen caxis([zmin zmax]) setter fargeskalaen slik at blått
% tilsvarer zmin og rødt tilsvarer zmax
caxis([-10 10]);
xlabel('x/a'); % Tekst på aksene
ylabel('z/a');
zlabel('Ve');
```

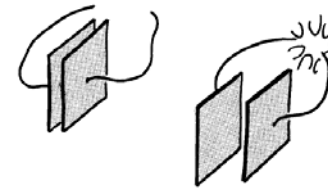
Øving 6. Opg. 1 (Plotte V() med Matlab/Octave)



ENERGY IN A CAPACITOR

Consider a simple capacitor made of a pair of conducting plates in close proximity. Suppose the plates are appropriately charged + and - and then discharged to produce a spark. Next, the plates are charged again exactly as they previously were, only this time after being charged they are pulled farther apart. If they are then shorted out a second time, the spark produced will be

Flervalgsoppgaver fra «Thinking physics»: <http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/tf4155/diverse/thinkingphysics/>



Svar: a)  
 Konstant ladning Q  
 Lavere kapasitans  $C = \epsilon_0 A/d$   
 $\Rightarrow$  Høyere spenning  $V = Q/C$   
 $\Rightarrow$  Mer energi  $U = \frac{1}{2} QV$  !

eller:  
 Konstant ladning Q  
 $\Rightarrow$  Konstant felt  $E = \sigma/\epsilon_0$   
 $\Rightarrow$  Konstant energitetthet  $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$   
 $\Rightarrow U = u \cdot (\text{volum})$  øker !

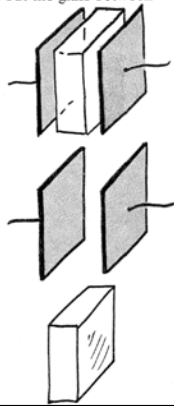
- a) bigger (liberate more energy) than the first spark
- b) smaller than the first spark
- c) the same size as the first spark

$V = E \cdot d$  øker også

GLASS CAPACITORS

If a glass capacitor is charged, but the glass between the plates is removed before it is discharged, the spark will be

- a) bigger than it would have been if the glass were left in at discharge
- b) smaller than it would have been if the glass were left in at discharge
- c) the same as it would have been if the glass were left in at discharge



Svar: a)  
 Konstant ladning Q  
 Lavere  $\epsilon_r$   
 $\Rightarrow$  Lavere kapasitans  $C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$   
 $\Rightarrow$  Høyere spenning  $V = Q/C$   
 $\Rightarrow$  Mer energi  $U = \frac{1}{2} QV$  !

eller:  
 Konstant ladning Q  
 Lavere  $\epsilon_r$   
 $\Rightarrow$  Økende felt  $E = \sigma/\epsilon_r \epsilon_0$   
 $\Rightarrow$  Økende energitetthet  $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$   
 $V = E \cdot d$  øker også

• Noen av Støvnengs flervalgsoppgaver

14) En parallellplatekondensator består av to parallelle metallplater i innbyrdes avstand  $d$ . De to metallplatene har ladning henholdsvis  $Q$  og  $-Q$ . En metallskive med tykkelse  $h = 2d/3$  settes inn midt mellom platene. Da blir potensialforskjellen mellom kondensatorplatene

- A ni ganger større.
- B tre ganger større.
- C tre ganger mindre.
- D ni ganger mindre.
- E uendret.

