

## Magnetisme

- **Magnetostatikk** (ingen tidsvariasjon):
- Kap 27. Magnetiske krefter
- **Kap 28: Magnetiske kilder**
- **Elektrodynamikk:**
- Kap 29-31:  
Tidsvariasjon: Induksjon mm.

## Kap 28: Magnetiske kilder

- **Elektrostatikk:**  
Ladning  $q$  påvirkes av kraft  $q\mathbf{E}$  (Coulombs lov)  
→ Definisjon  $E$ -felt  
 $E$ -feltet skapes fra ladninger (Coulombs lov)
- **Magnetostatikk:**  
Ladning  $q$  i **bevegelse** påvirkes av kraft  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  (Lorentzkrafta)  
→ Definisjon  $B$ -felt (Lorentzkrafta)  
 $B$ -feltet skapes fra ladninger i **bevegelse** (Biot-Savarts lov)
- **Hjelpelover:**  
Elektrostatikk: Gauss' lov  
Magnetostatikk: Amperes lov
- **Magnetiske materialer**  
Ferromagnetisk materiale. Magnetisering.  $\mathbf{M}$ -vektor og  $\mathbf{H}$ -vektor.

## Elmag og relativitetsteori i [Notat 3](#)

Einsteins utledning av spesiell relativitetsteori var drevet av dette problemet i elektromagnetismen:

Elektriske og magnetiske krefter er to sider av samme sak, avhengig av referansesystemet det hele observeres i.

### 28.1+28.2 Bevegelse av ladninger gir magnetfelt $B$

- Enkeltladning i bevegelse: 
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{Enhetsvektor} \quad (28.2)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

- Strøm i leder: (Biot-Savarts lov) 
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{Enhetsvektor}$$

1819-25: Vitenskapelig arbeid:  
Hans Christian Ørsted, André Ampere,  
Jean-Baptist Biot, Felix Savart,  
Michael Faraday, Joseph Henry

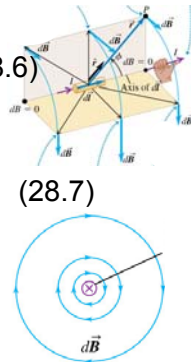
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (28.6)$$

28.1+28.2 Bevegelse av ladninger gir magnetfelt  $B$

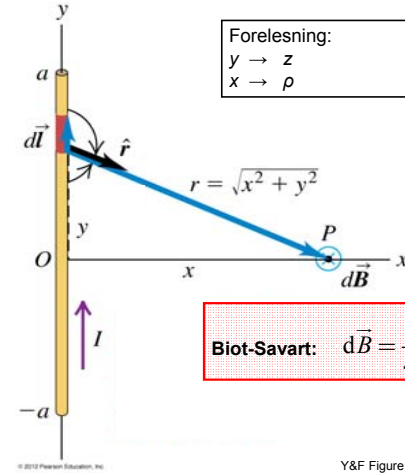
• Enkeltladning:  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$  (28.2)

• Strømelement:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$  (28.6)

• Strøm i leder:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{ledning}} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$  (28.7)  
(Biot-Savarts lov)



Eks. 1 (Y&F Kap. 28.3):  
B-felt på midtnormal til rett leder



Forelesning:  
 $y \rightarrow z$   
 $x \rightarrow \rho$

**Biot-Savart:**  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$

Y&F Figure 28.5

Rottmann integraltabell (s. 137)

47)  $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + c}} dx = \frac{-1}{ac - b^2} \frac{bx + c}{\sqrt{ax^2 + c}} + C$

48)  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + c}} = \frac{1}{ac - b^2} \frac{ax + b}{\sqrt{ax^2 + c}} + C$

49)  $\int x(ax^2 + c)^{k+1/2} dx = \frac{1}{(2k+3)a} (ax^2 + c)^{k+3/2} + C, k \neq -\frac{3}{2}$

50)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + c}} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{c}} \ln C_1 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{ax^2 + c}}{x}, & \text{f\u00f6r } c > 0, \\ \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{\sqrt{-c}}{a|x|} + C_2, & \text{f\u00f6r } c < 0 \text{ og } |x| \geq \sqrt{\frac{-c}{a}} \end{cases}$

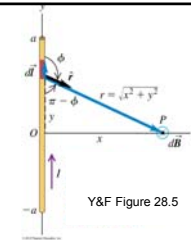
$X = ax^2 + 2bx + c$

$X = z^2 + \rho^2$ , dvs:

$x = z$   
 $a = 1$   
 $b = 0$   
 $c = \rho^2$

Rett leder lengde  $2a$ :

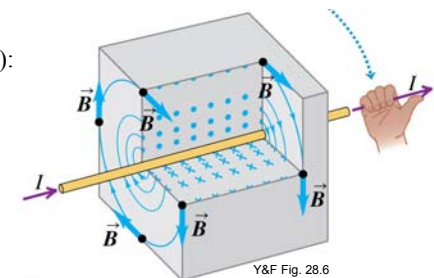
$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2a}{\rho} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} \hat{\phi}$  (28.8)



Y&F Figure 28.5

N\u00e6rme rett leder ( $a \gg \rho$ ):

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$  (28.9)



Y&F Fig. 28.6

**Felt rundt uendelig lang, rett leder:**

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}, \quad \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$$

**Eksempler:**

- 1) Under én kraftledning:  
 $I = 1 \text{ kA}, \rho = 100 \text{ m} \Rightarrow B = 2 \mu\text{T}$
- 2) Nær f. eks. hårføner:  
 $I = 3 \text{ A}, \rho = 5 \text{ cm} \Rightarrow B = 12 \mu\text{T}$

Jordmagnetismen:  $B = 0,5 \text{ G} = 50 \mu\text{T}$  (statisk felt)

1) og 2) gjelder for enkeltledere:

For to ledere med motsatt strøm eller trefase blir  $B$ -feltet betydelig lavere.

**Statens strålevern**  
 Norwegian Radiation Protection Authority

**Eksempler på magnetfeltnivå ved høyspenning:**

Spenningsnivå (kilovolt)	Strømstyrke (Ampere)	Avstand i meter som gir 0,4 μT
22	150	15
22	200	18
66	200	20
66	300	25
132	300	35
132	400	40
300	450	60
300	650	70
420	800	85
420	1100	100

Tabellen viser eksempler på hvor langt fra nærmeste ledning magnetfeltet vil være nede i utredningsnivået 0,4 μT. Eksempelene gjelder vanlig planoppheng, og er satt opp ut fra typiske gjennomsnittsverdier på strømstyrke i ledninger med ulike spenningsnivå.

Fra: <http://www.nrpa.no/strom-og-hovspenning>

**Magnetfelt fra to parallelle ledere**  
 (Ex. 28.4 i Y&F)

For  $r \gg d$ :  
 $B$ -felt avtar med  $1/r^2$ ,  
 dvs. betydelig raskere enn for enkeltleder.

(Fig 28.7)

Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley.

**Utafor koaksialkabel er  $B$ -feltet null!**

Mer seinere, bl.a. oppgave i regneøving.

Y&F Fig. 28.8

**B-felt** rundt uendelig lang, rett leder:

$$B = \frac{1}{2\pi} \mu_0 \frac{I}{r}$$

Retning: asimutalt ( $\varphi$ -retning)  
 $r$  = avstand fra ledere

**Sammenlikn med:**

**E-felt** rundt uendelig lang, ladd rett leder:

$$E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

Retning: radielt ( $r$ -retning)  
 $r$  = avstand fra ledere

### Kap 28: Magnetiske kilder

- Elektrostatikk:**  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\hat{r}}{r^2}$  (Coulombs lov)
- Magnetostatikk:**
  - Enkeltladning:  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$  (28.2)
  - Strøm i leder:  $\vec{B} = \int_{\text{ledn.}} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{ledn.}} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$  (28.7) (Biot-Savart)

1819-25: Vitenskapelig arbeid:  
 Hans Christian Ørsted, André Ampere, Jean-Baptist Biot,  
 Felix Savart, Michael Faraday, Joseph Henry

- Eks. 1: Rett leder**
- 28.4 Definisjon 1 ampere**
- Eks. 2: Sirkulær sløyfe**
- Amperes lov**

### 28.4 Kraft mellom to parallelle ledere

$$F' = I_1 I_2 \mu_0 / (2\pi r)$$

**Definisjon 1 A:**  
 $2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m} = 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ A} \mu_0 / (2\pi \cdot 1 \text{ m})$

.. er i praksis definisjon av  $\mu_0$ .  
 $\mu_0 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$

Copyright © 2006 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.  
 Figure 28.9

### Definisjon av 1 ampere (grunnenhet i SI-systemet)

- En ampere er den konstante elektriske strømmen som frambringer en gjensidig lineær kraft på  $2 \cdot 10^{-7}$  newton per meter leder når strømmen går gjennom hver av to rettlinjete, parallelle, uendelige lange ledere med sirkulært og neglisjerbart lite tverrsnitt, og lederne er anbrakt i én meters innbyrdes avstand i tomt rom.
- ampere er en av sju SI-grunneheter:
 

meter	- lengde
kilogram	- masse
sekund	- tid
ampere	- strømstyrke
kelvin	- temperatur
mol	- stoffmengde
candela	- lysstyrke

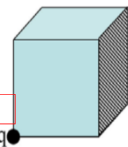
Alle andre enheter er avledet fra disse, for eksempel  
 $N = \text{kg m s}^{-2}$   
 $V = \text{J/C} = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-1}$   
 (se formelarket)

### Øving 9, flervalg:

a) En punktladning  $q$  er plassert i det ene hjørnet av en kube. Hva blir elektrisk fluks gjennom den skraverte (høyre) sideflata i figuren?

A)  $q$                       D)  $q/8$   
 B)  $q/3$                     E)  $q/24$   
 C)  $q/4$

Elek. fluks = fluks til  $D$ -feltet  
 $\Phi = D \cdot A$



Young & Freedman, kap. 22.2:

brukes:  
 Elek. fluks = fluks til  $E$ -feltet  
 $\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$

If the area  $A$  is flat but not perpendicular to the field  $\vec{E}$ , then fewer field lines pass through it. In this case the area that counts is the silhouette area that we see when looking in the direction of  $\vec{E}$ . This is the area  $A_\perp$  in Fig. 22.6b and is equal to  $A \cos \phi$  (compare to Fig. 22.5b). We generalize our definition of electric flux for a uniform electric field to

$$\Phi_E = EA \cos \phi \quad (\text{electric flux for uniform } \vec{E}, \text{ flat surface}) \quad (22.1)$$

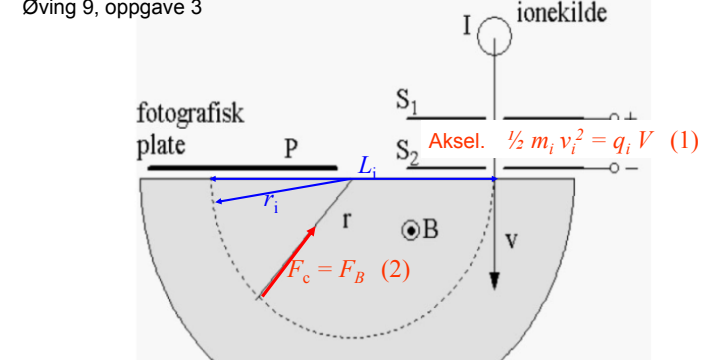
Since  $E \cos \phi$  is the component of  $\vec{E}$  perpendicular to the area, we can rewrite Eq. (22.1) as

$$\Phi_E = E_\perp A \quad (\text{electric flux for uniform } \vec{E}, \text{ flat surface}) \quad (22.2)$$

In terms of the vector area  $\vec{A}$  perpendicular to the area, we can write the electric flux as the scalar product of  $\vec{E}$  and  $\vec{A}$ :

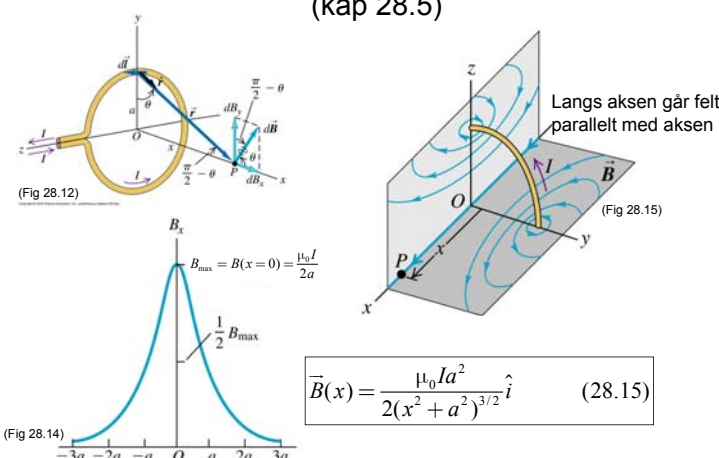
$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad (\text{electric flux for uniform } \vec{E}, \text{ flat surface}) \quad (22.3)$$

### Øving 9, oppgave 3



a) Likn. (1) for protonet  
 b) Likn (2) for protonet  
 c) Søk etter masseforholdet  $m_1/m_p$  med likn (1) og (2) for masse 1 og for protonet. Tilsvarende for  $m_2/m_p$

### Eks. 2: Feltet på akse i en sirkulær strømsløyfe: (kap 28.5)



Langs akse går feltet parallelt med akse

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i} \quad (28.15)$$

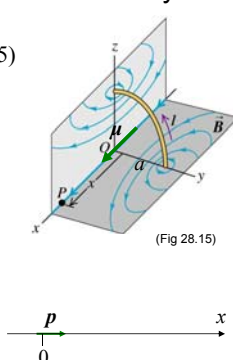
### Eks. 2: Feltet på akse i en sirkulær strømsløyfe

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i} \quad (28.15)$$

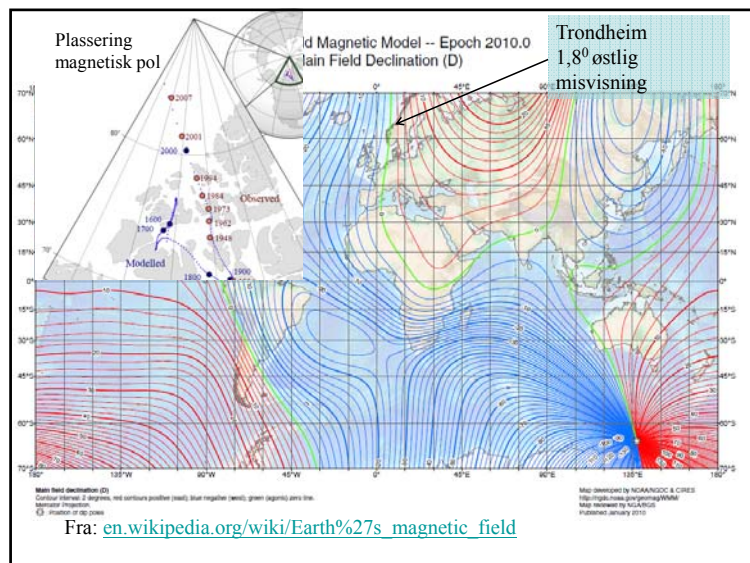
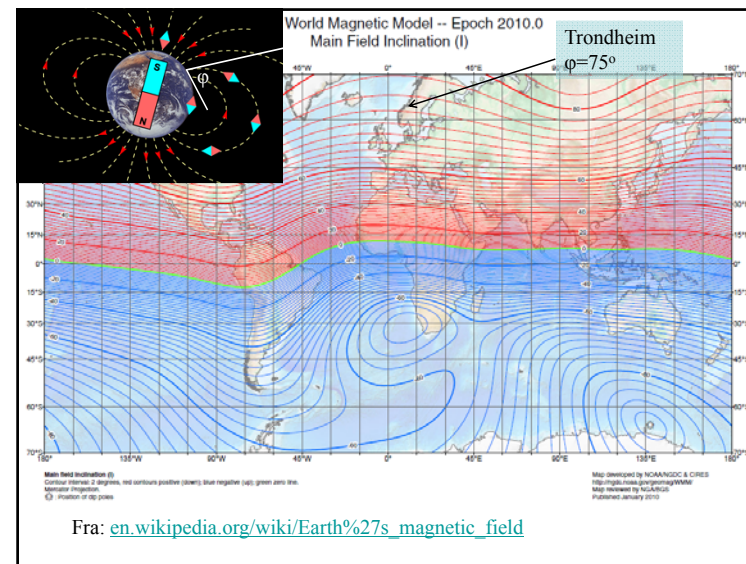
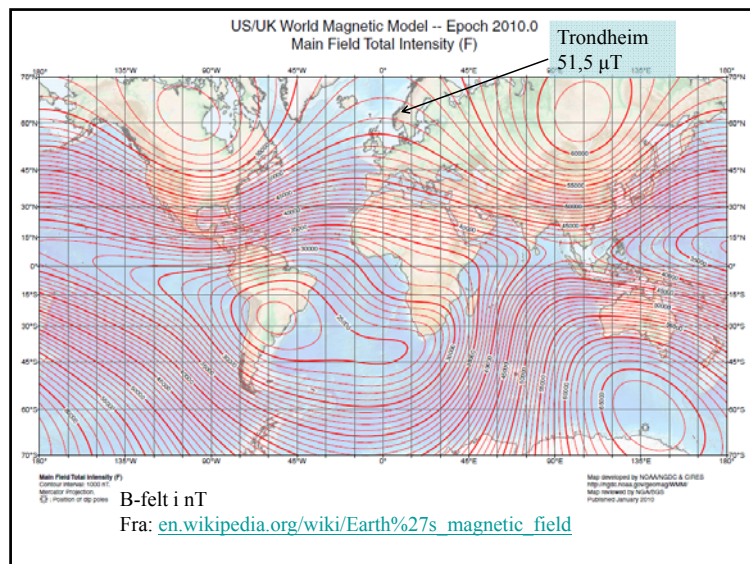
Langt unna  $x \gg a$ :  $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3} \hat{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{x^3}$

søyfas dipolmoment  $\mu = I\pi a^2$

Analogi:  
 Langt unna elektrisk dipol:  $E(x) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{x^3}$







Resultat i Eks. 1:

**B-felt** nærme rett leder  
(eller uendelig lang leder):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (28.9)$$

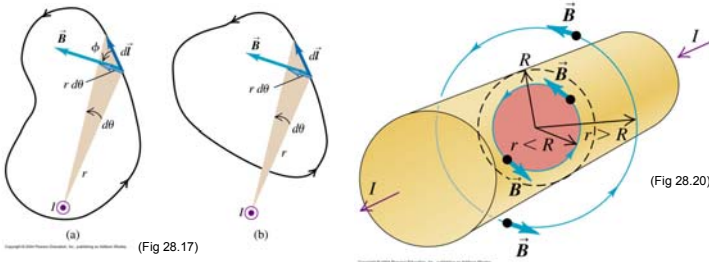
Retning: asimutalt (φ-retning)

Y&F Fig. 28.6

### Amperes lov

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

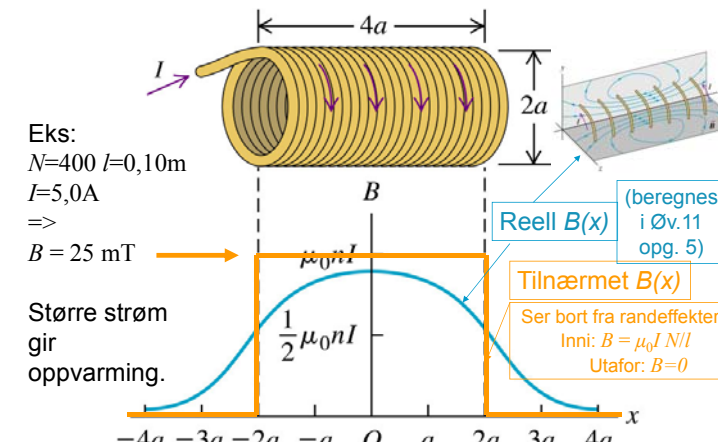
over lukka kurve, der  $I$  er totalstrøm innenfor kurva



(Fig 28.17) (Fig 28.20)

Gjelder alle integrasjonsveger, men er nyttig kun i (sylinder)symmetriske konfigurasjoner. F. eks. rundt leder:  $B = \mu_0 I / 2\pi r$

### Eks. 4: Solenoide (mange sirkulære strømsløyfer)



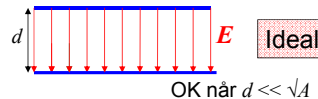
Eks:  
 $N=400$   $l=0,10\text{m}$   
 $I=5,0\text{A}$   
 $\Rightarrow$   
 $B = 25 \text{ mT}$

Større strøm gir oppvarming.

(beregnes i Øv.11 opg. 5)

Tilnærmet  $B(x)$   
 Ser bort fra randeffekter:  
 Inni:  $B = \mu_0 I N / l$   
 Utafor:  $B = 0$

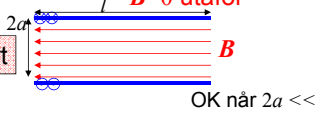
$E$  i parallellplatekondensator



$E=0$  utafor

OK når  $d \ll \sqrt{A}$

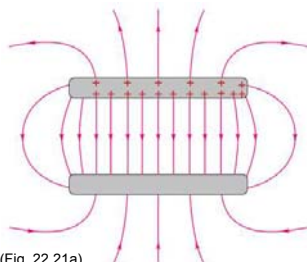
$B$  i solenoide



$B=0$  utafor

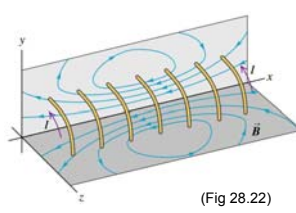
OK når  $2a \ll l$

Idealisert



Reelt

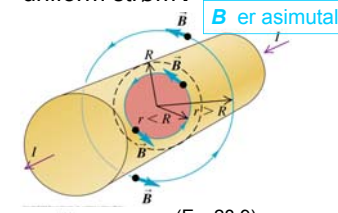
(Fig. 22.21a)



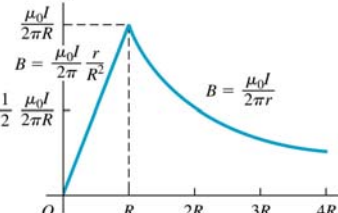
(Fig 28.22)

$|B|$  inni og utafor en sylinderleder med uniform strøm  $I$

analog til  $B$  er asimutal



(Ex. 28.9)

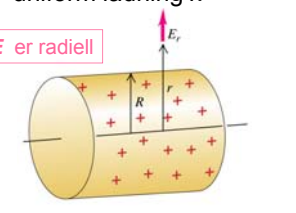


$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$

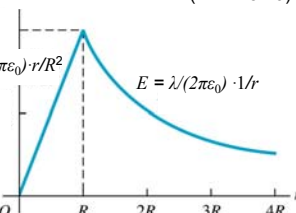
$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$|E|$  inni og utafor en sylinder med uniform ladning  $\lambda$

$E$  er radiell



(≈Ex. 23.10)



$E = \lambda / (2\pi \epsilon_0) \cdot 1/r$

Feltet i toroid solenoide: (Ex. 28.10)

(a) (Fig 28.25)

(b)

Path 1:	$I_{incl} = 0$	$\Rightarrow B = 0$
Path 2:	$I_{incl} = NI$	$\Rightarrow B \approx \mu_0 NI / 2\pi r$
Path 3:	$I_{incl} = NI + N(-I) = 0$	$\Rightarrow B = 0$

Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley

### Amperes lov

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad (\text{Amp})$$

over lukka kurve, der  $I$  er totalstrøm innenfor kurva

$$\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{Amp-diff})$$

### curl

-- kan i vannstrøm demonstreres med et (infinitesimalt) skovlhjul:

### Eks. 5: Feltet inni og utafor en ledning

$$\text{Ampere: } \text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Inni:  $\mu_0 \mathbf{J} = \text{curl } \mathbf{B}$

Utafor:  $\mu_0 \mathbf{J} = \mathbf{0} = \text{curl } \mathbf{B}$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$  (for  $r < R$ )

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  (for  $r > R$ )

(Fig 28.19)



### Curl inni lederen:

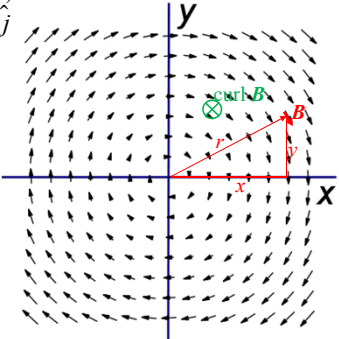
Kartesiske koord (Eks. forrige time):  
 $\vec{B}(x, y, z) = [y, -x, 0] = y\hat{i} - x\hat{j}$

Sylinderkoordinat:  
 $\vec{B}(r, \varphi, z) = -r\hat{\varphi}$

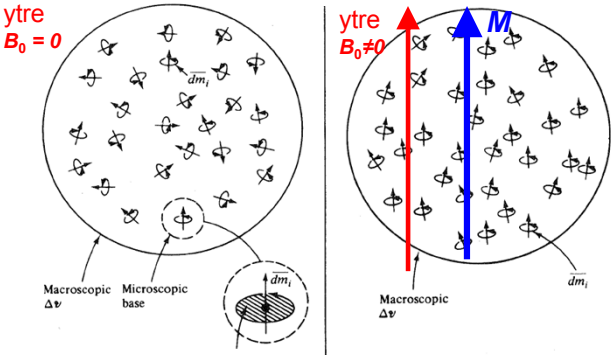
$\vec{J} = \text{curl } \vec{B} = -2\hat{k}$

Dvs. homogen strømtetthet, som inni lederen.

OBS: Konstanter utelatt, feil enheter for  $B$  og  $J$ .

$$\text{curl } \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \left( \frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) \hat{k} = -2\hat{k}$$


### Atomære magnetiske moment $\mu$ ( $= \vec{d}m_i$ ) i ytre magnetisk felt $B$



Paramagnetiske og ferromagnetiske:  
Innretting av magn.moment  $\mu$

### Tre typer magnetisk materiale:

Type	Effekt	Årsak: Ytre $H_0$ .....
Dia- magnetisk	$B$ -felt $\downarrow$	induserer magn.mom. $\mu$ med $\mu \parallel (-H)$
Para- magnetisk	$B$ -felt $\uparrow$	innretter permanente $\mu$ med $\mu \parallel H$
Ferro- magnetisk	$B$ -felt $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$	innretter permanente $\mu$ med $\mu \parallel H$ <b>Mange</b>

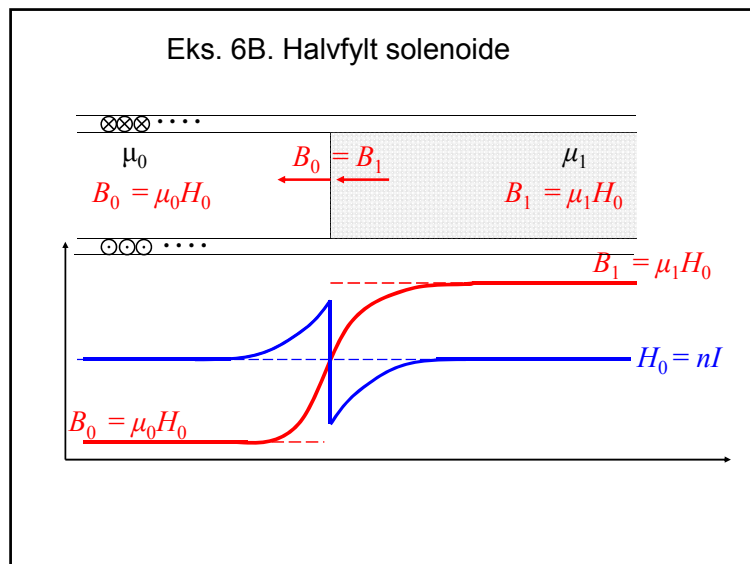
$B = \mu_0 \mu_r H$

#### TABLE 9-1 REPRESENTATIVE VALUES FOR PERMEABILITY $\mu_r$ FOR SEVERAL MATERIALS

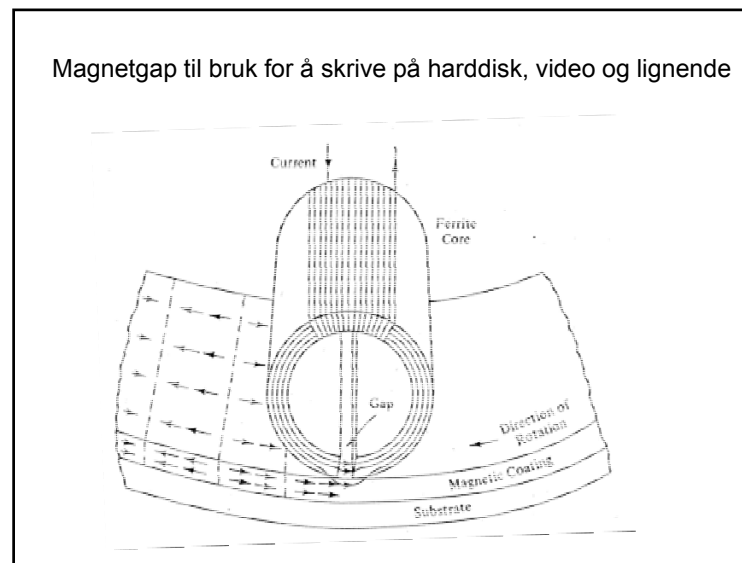
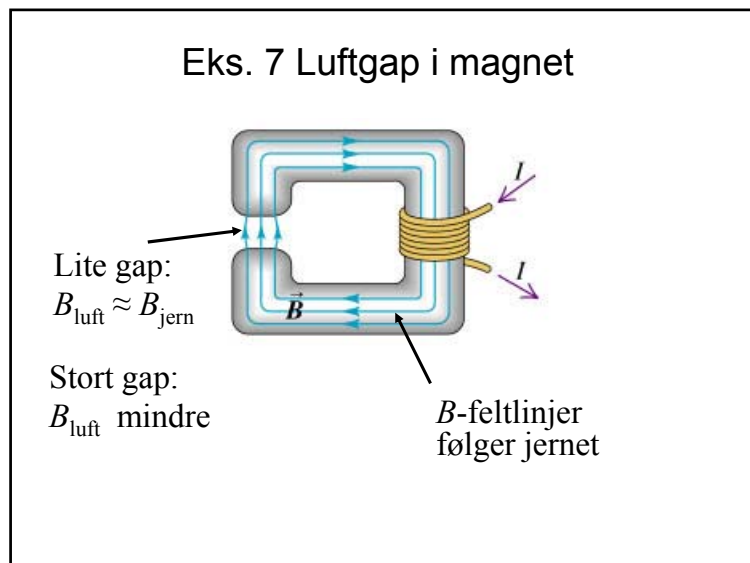
Material	Type	$\mu_r$
Bismuth	Diamagnetic	0.9999834
Silver	Diamagnetic	0.99998
Copper	Diamagnetic	0.999991
Vacuum	Nonmagnetic	1.00
Aluminum	Paramagnetic	1.00002
Nickel chloride	Paramagnetic	1.00004
Cobalt	Ferromagnetic	250
Nickel	Ferromagnetic	600
Mild steel	Ferromagnetic	2,000
Iron	Ferromagnetic	5,000
Mumetal	Ferromagnetic	100,000
Supermalloy	Ferromagnetic	800,000

$\mu_r$  avhengig  $H$  og tid (hysteresis)





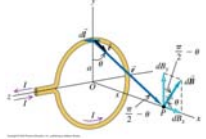
- Kontinuitetskrav over grenseflater (skille i  $\mu_r$ ):
  - 1)  $B_{\perp}$  kontinuerlig
  - 2)  $H_{\perp}$  diskontinuerlig (faktor  $\mu_r$ )
  - 3)  $H_{\parallel}$  kontinuerlig
  - 4)  $B_{\parallel}$  diskontinuerlig (faktor  $\mu_r$ )



### Kap. 28: Oppsummering: Kilde til magnetisk felt

- Bevegelse av ladninger er kilde for magnetfelt  $\vec{B}$ 
  - Enkeltladning i bevegelse:  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$
  - Strøm i leder:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$
- Magnetfelt  $\vec{B}$  kan finnes ved integrasjon over leder fra Biot-Savarts lov
  - eller ved bruk av:
- Amperes lov:
 
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

der  $I$  er strøm innenfor den lukkede integrasjonsvegen.  
Differensialform:  $\text{curl } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad \text{curl } \vec{H} = \vec{J}$
- Viktige anvendelser: Rett leder, solenoide, m.m.



### Kap. 28: Oppsummering: Magnetiske materialer

- Materialer kan magnetiseres:  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ 
  - Diamagnetiske:  $\chi_m$  liten, negativ
  - Paramagnetiske:  $\chi_m$  liten, positiv
  - Ferromagnetiske:  $\chi_m$  **stor** positiv
- Strømmer skaper magnetisk feltstyrke  $\vec{H}$  og flukstetthet:
 
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

.. altså avhengig av relativ permeabilitet  $\mu_r$  og dermed av materialet
- I alle tidligere formler kan vi erstatte  $\mu_0$  med  $\mu = \mu_0 \mu_r$
- Kontinuitetskrav over grenseflater (skille i  $\mu_r$ ): [Mer i Notat 6]
 

$B_{\perp}$  kontinuerlig     $B_{\parallel}$  diskontinuerlig  
 $H_{\perp}$  diskontinuerlig     $H_{\parallel}$  kontinuerlig

### Maxwells likninger i [Notat 4](#)

Integralform	Differensialform
$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$ Gauss' lov $\vec{D}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ Gauss' lov $\vec{B}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ Amperes lov	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ Faradays lov	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$