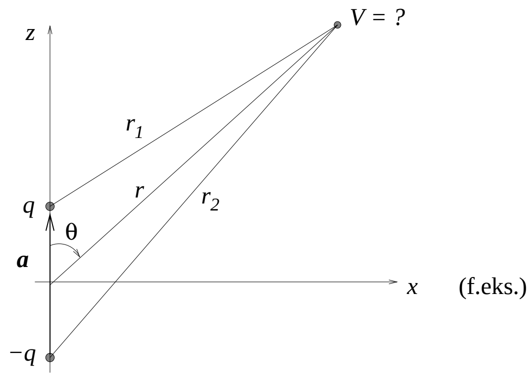
TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme

Øving 4
Elektrisk potensial og Gauss' lov.

Veiledning: Uke 5 og 6 ifølge nettsider.
Innlevering: Onsdag 5. feb. kl. 14:00 Lever øvinger i bokser utenfor R1.



Oppgave 1. Potensial rundt elektrisk dipol.

En elektrisk dipol som består av to punktladninger $\pm q$, er plassert langs z-aksen med sentrum i origo, som vist i figuren. Det elektriske *dipolmomentet* er da $\vec{p} = q\vec{a}$, der $\vec{a} = a\,\hat{z}$ er vektoren fra $-q$ til q.

Siden vi her opplagt må ha *symmetri* med hensyn til rotasjon omkring z-aksen, er det tilstrekkelig å se på forholdene i et halvplan som inneholder z-aksen, f.eks. xz-planet, med $x > 0$.

Vi kan videre velge mellom kartesiske koordinater (x, z) eller polarkoordinater (r, θ) for å angi en vilkårlig posisjon i dette planet. Vi skal se på begge deler i denne oppgaven. Vinkelen θ kan vi selvsagt velge i forhold til hvilken kartesiske akse vi vil; her lar vi θ være vinkelen som $\vec{r}$ danner i forhold til z-aksen (se figuren).

a) Bestem først sammenhengen mellom de kartesiske koordinatene og polarkoordinatene, dvs. $x(r,\theta)$, $z(r,\theta)$ og $r(x,z)$.

b) Vis at potensialet fra en slik dipol i kartesiske koordinater blir

$$V(x,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(z-a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(z+a/2)^2}}\right).$$

c) Hva blir potensialet på x-aksen, $V(x,0)$?

d) Hva blir potensialet på z-aksen, $V(0,z)$? (På *hele* z-aksen; pass på fortegnene...!) Skisser funksjonen $V(0,z)$.

e) Vis at i stor avstand fra dipolen (dvs $r \gg a$) er potensialet med god tilnærmelse[1] gitt i polarkoordinater ved

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}.$$

Tips: Skriv om

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

og bruk figuren over til å finne et tilnærmet uttrykk for dette når $r \gg a$.

f) Mens potensialet fra en enkelt punktladning avtar som $1/r$, avtar altså potensialet fra en dipol *raskere*, nemlig som $1/r^2$. Har du noen kommentarer til om dette er rimelig?

[1] For den som insisterer på en mer rigid matematisk tilnærming til denslags, er det her snakk om å bestemme $V(r,\theta)$ "til ledende orden" i den "lille parameteren" a/r. Med andre ord, det oppgitte uttrykket for $V(r,\theta)$ er *eksakt* for en såkalt *ideell dipol* med "null utstrekning" (dvs $a \to 0$).

Oppgave 2. To kuleskall.

To svært tynne, konsentriske, metalliske kuleskall har radier henholdsvis R og $\frac{3}{2}R$. Det indre skallet har ladningen q, og det ytre skallet har ladningen $-3q$.

a) Finn uttrykk for det elektriske feltet $\vec{E}(r)$ i alle deler av rommet.

b) Hva er potensialdifferansen mellom skallene?

c) Hvordan vil ladningen fordele seg dersom de to skallene forbindes med en tynn ledende tråd?

Oppgave 3. Kule med gitt $Q(r)$.

Ei kule med radius R har en ladningfordeling slik at ladningen $Q(r)$ innenfor radius r er gitt ved

$$Q(r) \quad = \quad 4\pi\rho_0\left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{R}r^4\right) \qquad \text{for } r \leq R$$

Den totale ladningen for kula er således

$$Q_0 = Q(R) = \frac{4\pi}{3}R^3\rho_0,$$

hvor vi ser at ρ_0 er gjennomsnittsverdien av $\rho(r)$ i kula. Utenfor kula er det ladningsfritt.

a) Bestem det elektriske feltet utenfor kula ($r > R$) og inne i kula ($r \leq R$).

b) Bestem det elektriske potensialet $V(r)$ utenfor kula og inne i kula. Sett referansepunktet ved $r \to \infty$, dvs. $V(\infty) = 0$.

c) Er potensialet kontinuerlig ved overflata av kula ($r = R$)?

d) Finn uttrykk for romladningstettheten $\rho(r)$ for $r \leq R$.

e) Bruk Matlab el.l. til å lage vise grafer av ρ, Q, E og V. Plot i et og samme koordinatsystem for $0 < r/R < 3/2$. Velg dimensjonsløse variable: $\dfrac{\rho(r/R)}{4\rho_0}$, $\dfrac{Q(r/R)}{\frac{4\pi\rho_0}{3}R^3}$, $\dfrac{E(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R}$ og $\dfrac{V(r/R)}{\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}R^2}$.

Utvalgte fasitsvar:

2b) $-q/(12\pi\epsilon_0 R)$,

3a) $E(r < R) = \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0}\left(4r/R - 3r^2/R^2\right)$, 3b) $V(r < R) = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0}\left[2 - 2r^2/R^2 + \frac{r^3}{R^3}\right]$, 3d) $4\rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$.