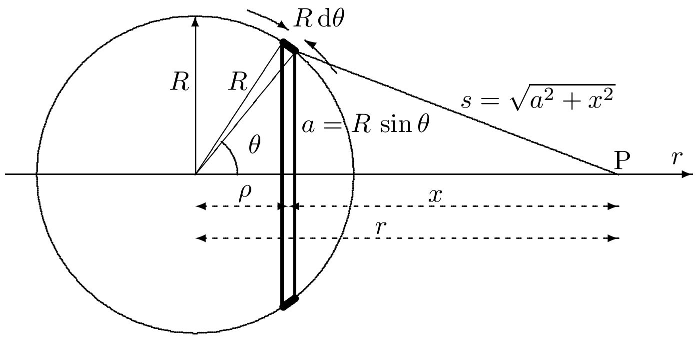
Eksempler i kap. 23, utfyllende til forelesning.

Eks. 6B. $V(r)$ inni og utenfor ladd lederkule ved *Metode 1* (integrasjon over punktladninger).

Vi skal finne potensialet $V(r)$ til ei lederkule med radius R og ladning Q. Problemet ble løst i forelesning med metode 2, dvs. brukt kjent E inni og utenfor kula. Vi skal nå bruke metode 1, dvs. integrere over hele kula der det er ladning, dvs. på kulas overflate. Lederkulas overflate får overflateladningstetthet $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$. Vi baserer oss på resultat i Eks. 7 i forelesning, der vi fant at potensialet på midtaksen til en ring med radius a og ladning Q er i avstand x fra ringens sentrum:

$$V(x) = k\frac{Q}{s} \qquad \text{der} \quad s^2 = a^2 + x^2. \tag{1}$$



Vi utnytter dette ved å dele lederkuleoverflata opp i infinitesimale ringer konsentrisk om x-aksen og med radius a og ladning dq. Ifølge likn. (1) er potensial i avstand $r = \rho + x$ fra kulesentrum (se figuren)

$$\mathrm{d}V = k\frac{\mathrm{d}q}{s} \qquad \text{der} \quad s^2 = a^2 + (r-\rho)^2. \tag{2}$$

Hver ring danner en vinkel θ med x-aksen og bredden på ringen (målt som del av kuleskallet) er $R\,\mathrm{d}\theta$. Ringen ved posisjon θ har radius $a = R\sin\theta$ og arealet av ringen er $\mathrm{d}A = 2\pi a\, R\mathrm{d}\theta$ (omkrets $\times$ bredde). Kuleskallets totale areal er $4\pi R^2$, og derfor er ladningen for ringen

$$\mathrm{d}q = Q\frac{2\pi a\, R\mathrm{d}\theta}{4\pi R^2} = Q\frac{2\pi R\sin\theta\, R\mathrm{d}\theta}{4\pi R^2} = \frac{Q}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{3}$$

Potensial i punktet P avstand r fra kulesentrum er

$$V(r) \quad = \quad \int_{\text{kula}} \mathrm{d}V = \int_{\text{kula}} k\frac{\mathrm{d}q}{s}\,. \tag{4}$$

Her er $s(\theta)$, og vi skriver om

$$\begin{aligned} s^2 &= a^2 + (r-\rho)^2 \\ &= R^2\sin^2\theta + (r - R\cos\theta)^2 \\ &= R^2\sin^2\theta + r^2 - 2rR\cos\theta + R^2\cos^2\theta \\ &= R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta \\ &= A - B\cos\theta \end{aligned}$$

der vi har definert hjelpestørrelsene $A = R^2 + r^2$ og $B = 2rR$. Disse er konstanter (varierer ikke under integrasjonen over θ). Innsatt $s(\theta)$ samt dq fra likn. (3) får vi fra (4) potensialet

$$V(r) \quad = \quad kQ\int_0^\pi \frac{\sin\theta\ \mathrm{d}\theta}{2\sqrt{A - B\cos\theta}} = kQ\left[\frac{1}{B}\sqrt{A - B\cos\theta}\right]_0^\pi = \frac{kQ}{B}\left[\sqrt{A+B} - \sqrt{A-B}\right].$$

Nå er $A + B = R^2 + r^2 + 2rR = (R+r)^2$ og $A - B = R^2 + r^2 - 2rR = (R-r)^2$. For $r > R$, dvs. utenfor kula får vi

$$\underline{V(r)} \quad = \quad \frac{kQ}{2rR}\left[(R+r) - (r-R)\right] = \underline{k\frac{Q}{r}, \quad \text{når } r > R}\,. \tag{5}$$

For $r < R$, dvs. inni kula får vi derimot $\sqrt{A-B} = R - r$ slik at potensialet blir

$$\underline{V(r)} \quad = \quad \frac{kQ}{2rR}\left[(R+r) - (R-r)\right] = \underline{k\frac{Q}{R}, \quad \text{når } r < R}\,. \tag{6}$$

Merk at for P inni kula er fortsatt $r = \rho + x$ (x er negativ når $r < \rho$) og $s^2 = a^2 + (r-\rho)^2$.

Eks. 8B. $V(r)$ inni og utenfor homogent ladd kule ved *Metode 1* (integrasjon over punktladninger).

Vi skal finne potensialet $V(r)$ i et punkt P i avstand r fra sentrum av ei homogent ladd kule med radius R og ladning Q. Problemet ble løst i forelesning med metode 2, dvs. brukt kjent E inni og utenfor kula. Vi skal nå bruke metode 1, dvs. integrere over kula. Kula får romladningstetthet $\rho = \frac{Q}{4/3\pi R^3}$.

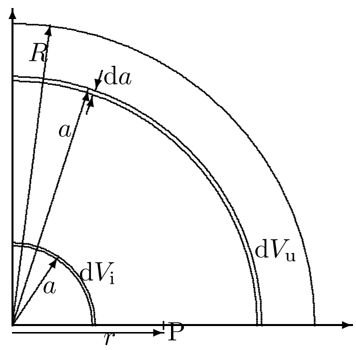
Vi baserer oss på resultat i Eks. 6 (ovenfor), der vi fant at potensialet inni og utenfor et kuleskall med radius R og ladning Q . Vi deler altså kula opp i kuleskall med radius a og infinitesimal tykkelse da. Dette kuleskallet har volum $\mathrm{d}\tau = 4\pi a^2 \mathrm{d}a$ og ladning

$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}\tau = \rho 4\pi a^2 \mathrm{d}a = \frac{Q}{4/3\pi R^3} 4\pi a^2 \mathrm{d}a = \frac{3Qa^2 \mathrm{d}a}{R^3}. \tag{7}$$

Når punktet P ligger utenfor kula ($r > R$) er det enkelt: Hvert kuleskall har samme avstand r fra sentrum (origo) slik at for hvert kuleskall er fra likn. (5) $\mathrm{d}V = k\frac{\mathrm{d}q}{r}$ og totalt potensial er

$$\underline{V(r > R)} \;=\; \int_{\text{kula}} \mathrm{d}V \;=\; \frac{k}{r}\int_{\text{kula}} \mathrm{d}q \;=\; \underline{k\frac{Q}{r}}.$$

Når punktet P ligger inni kula ($r < R$) må vi imidlertid dele opp integralet fordi vi har ulike uttrykk for dV om det infinitesimale kuleskallet ligger utenfor eller innenfor punktet P vi betrakter. Vi skal altså integrere over alle kuleskall fra radius $a = 0$ til $a = R$.



Kuleskall innenfor P ($a < r$), likn. (5) : $\qquad \mathrm{d}V_\mathrm{i} = k\frac{\mathrm{d}q}{r}$

Kuleskall utenfor P ($a > r$), likn. (6): $\qquad \mathrm{d}V_\mathrm{u} = k\frac{\mathrm{d}q}{a}$.

I figuren er tegnet inn to infinitesimale kuleskall, ett ved $a < r$ og markert dV_i og ett ved $a > r$ og markert dV_u.

Dette gir med innsatt dq fra likn. (7)

$$\begin{aligned}
\underline{V(r < R)} &= \int_{a=0}^{r} \mathrm{d}V_\mathrm{i} + \int_{a=r}^{R} \mathrm{d}V_\mathrm{u} \\
&= \int_{a=0}^{r} k\frac{\mathrm{d}q}{r} + \int_{a=r}^{R} k\frac{\mathrm{d}q}{a} \\
&= \int_{0}^{r} k\frac{3Qa^2\mathrm{d}a}{R^3 r} + \int_{r}^{R} k\frac{3Qa^2\mathrm{d}a}{R^3 a} \\
&= \frac{kQ}{R^3 r}\int_0^r 3a^2\mathrm{d}a + \frac{3kQ}{R^3}\int_r^R a\mathrm{d}a \\
&= \frac{kQ}{R^3 r}\left[a^3\right]_0^r + \frac{3kQ}{R^3}\left[\frac{1}{2}a^2\right]_r^R \\
&= \frac{kQ}{R^3 r}r^3 + \frac{kQ}{R^3}\left[\frac{3}{2}R^2 - \frac{3}{2}r^2\right] \\
&= \frac{kQ}{R^3}\left[r^2 + \frac{3}{2}R^2 - \frac{3}{2}r^2\right] \\
&= \frac{kQ}{R^3}\left[\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right] \\
&= \underline{\frac{kQ}{2R}\left[3 - \frac{r^2}{R^2}\right]}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 23.1.15