Kap. 22.
Gauss' lov

Vi skal se på:

- Fluksen til elektrisk felt ***E***
- Gauss' lov
  - Integralform og differensialform
- Elektrisk ledere.

E-felt fra Coulombs lov:

$$\overline{E} = k\frac{q}{r^2}\cdot\hat{r} \qquad \overline{E} = k\sum_n \frac{q_n}{{r_{0n}}^2}\hat{r}_{0n} \qquad \overline{E} = k\int_{tot.ladn.} \frac{\mathrm{d}q}{r^2}\cdot\hat{r}$$

Punktladn | Flere punktladn. | Kontinuerlig fordeling

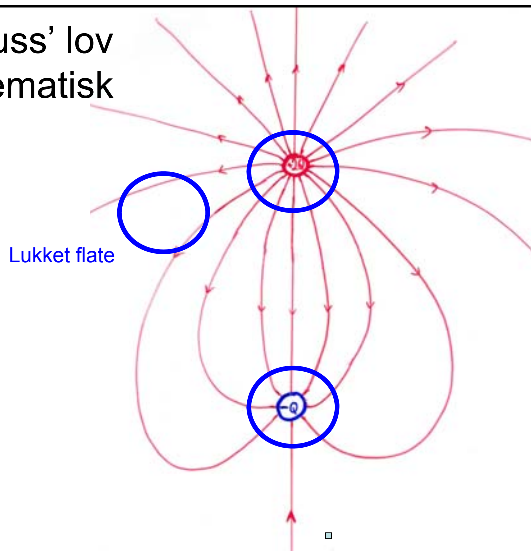
Blir lett vanskelig integrasjonsarbeid.
En enklere metode?

Ja: Gauss' lov

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), tysk matematiker / fysiker

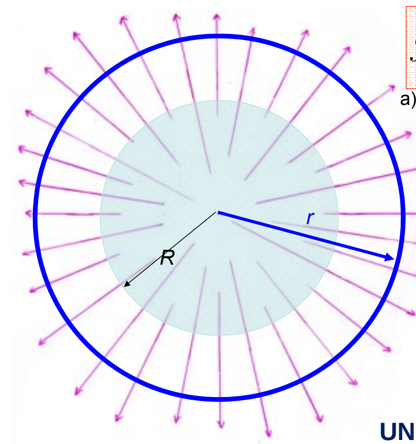
---

Gauss' lov skjematisk



Eks.1: Homogent ladd kule

=Y&F Ex. 22.9 = LHL 19.12



$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\mathrm{encl}}$$

a) Utenfor kula $r > R$:

$$q_{\mathrm{encl}} = Q$$

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

b) Inni kula $r < R$:

q_{encl} er mindre

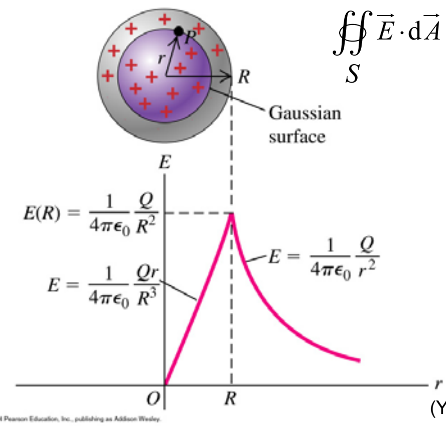
$$q_{\mathrm{encl}} = Q\, r^3/R^3$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$$

UNYTTIG

Eks.1: Homogent ladd kule

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{encl}}$$

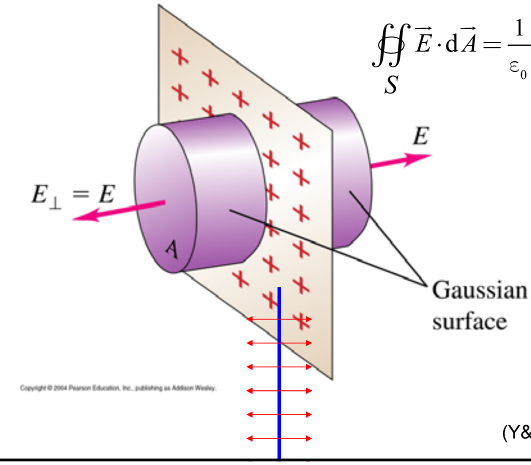


(Y&F Fig 22.22)

Eks.2: Felt nær flateladning

=Y&F Ex. 22.7 = LHL 19.14

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{encl}}$$



(Y&F Fig 22.20)

Eksempler

i forelesning (Eks…), Y&F Ed13 (Ex…), og LHL (L…)

	Kap 21. *E*-felt	Kap 22. Gauss lov	Kap 23. Potensial
Dipol	Eks. 2 Ex. 21.8+21.14 L19.6		Eks. 4 Ex. 23.4
Linjeladning endelig	Eks. 3 Ex. 21.10		Ex. 23.12
Linjeladning uendelig	(Eks. 3) L19.7	Eks. 5 Ex. 22.6, L19.13	Eks. 9 Ex. 23.10
Tynn ring	Eks. 4 Ex. 21.9		Eks. 7 Ex. 23.11
Sirkulær plate	Eks. 5 Ex. 21.11		
Uendelig plate	Eks. 6 Ex. 21.11 L19.9	Eks. 2 Ex. 22.7 L19.14	L19.15
Parallellplater	Ex. 21.12 Eks. 7	Ex. 22.8	Eks. 5 Ex. 23.9
Kule med homogen ladning		Eks. 1 Ex. 22.9 L19.12	Eks. 8 L19.19
Lederkule		Eks. 3 Ex. 22.5	Eks. 6 Ex. 23.8

Ladningstettheter:

	Symbol	Enhet	Infinitesimal ladning
Linje-	λ	C/m	$dq = \lambda\, dl$
Flate-	σ	C/m^2	$dq = \sigma\, dA$
Rom-	ρ	C/m^3	$dq = \rho\, d\tau$

Eks.: Romladning

$$q_{\text{encl}} = \int dq = \iiint \rho\, d\tau$$

med høvelig volumelement $d\tau$, f.eks.

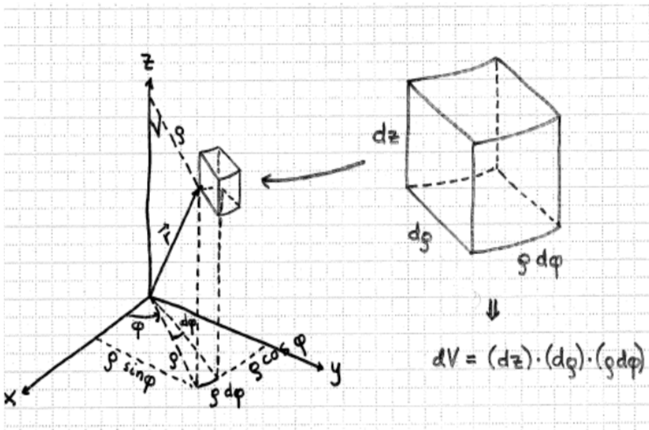
$d\tau = dx\, dy\, dz$ (kartesisk koord.)

$d\tau = 4\pi\, r^2\, dr$ (kulekoord.)

$d\tau = h\, 2\pi r\, dr$ (sylinderkoord.)

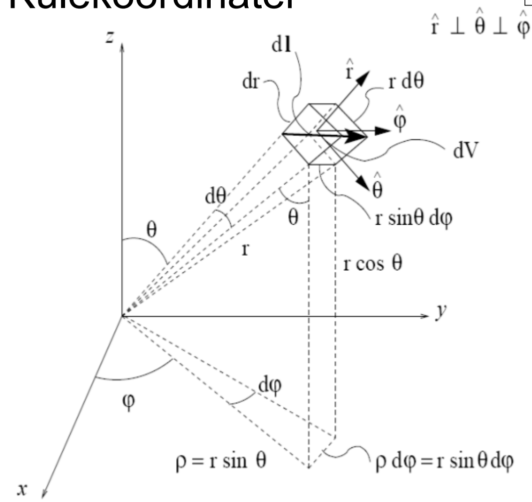
Sylinderkoordinater

Figur: Støvneng bruker ρ isf. r



Kulekoordinater

Figur: Støvneng



Infinitesimale volumelement

Kartesiske koordinater: $d\tau = dx\,dy\,dz$

Sylinderkoordinater: $d\tau = r\,d\varphi \cdot dr \cdot dz$

Integrert over φ: $d\tau = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r\,dr \cdot dz = 2\pi r\,dr\,dz$

Når sylindersymmetri bruk alltid dette uttrykket:

$\boxed{d\tau = 2\pi r\,dr\,l = \text{omkrets} \cdot \text{tykkelse} \cdot \text{høyde}}$

Kulekoordinater: $d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin\theta\, d\varphi = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, r^2\, dr$

Integrert over θ og φ: $d\tau = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r^2\, dr = 2\cdot 2\pi \cdot r^2\, dr$

Når kulesymmetri bruk alltid dette uttrykket:

$\boxed{d\tau = 4\pi\, r^2\, dr \;=\; \text{kuleareal} \cdot \text{tykkelse}}$

se også formelark

Gauss' lov

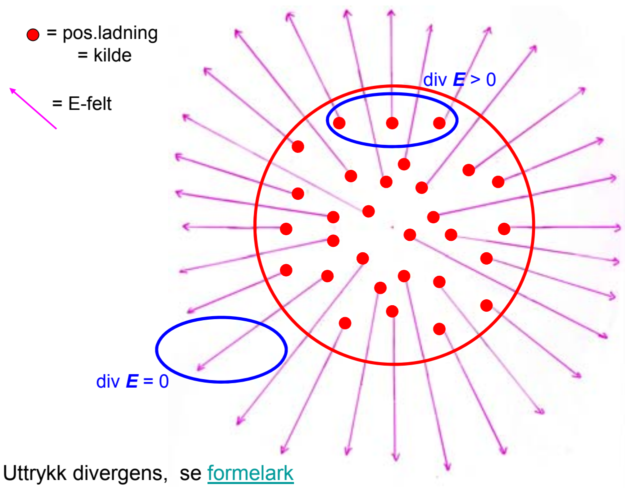
- **Integralform:** $\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{encl}}$

  Fluks ut = $1/\varepsilon_0$ · (ladn. innenfor)

- **Differensialform:** $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$\operatorname{div}\vec{E} =$ divergensen til ***E***

divergens = kilde



Uttrykk divergens, se formelark

Gauss' lov på differensialform:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad = \text{divergensen til } \vec{E}$$

Divergensen med nablaoperator:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

Kartesiske koordinater:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot\left[E_x, E_y, E_z\right]$$

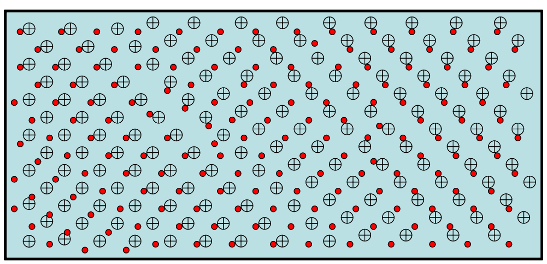
$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Sylinder- og kulekoordinater: Se formelark.
Kun r-avhengighet aktuelt ($\partial/\partial r$).

Elektrisk leder med valenselektroner

Et metallatom:
(eks Li)
Ett elektron frigjøres lett (valenselektron)

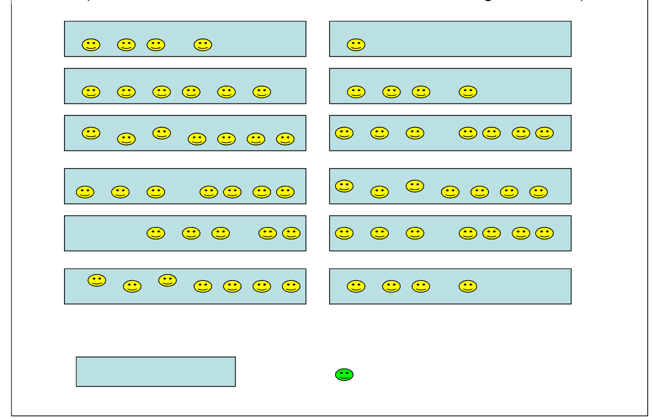
og valenselektronene beveger seg fritt i metallet:



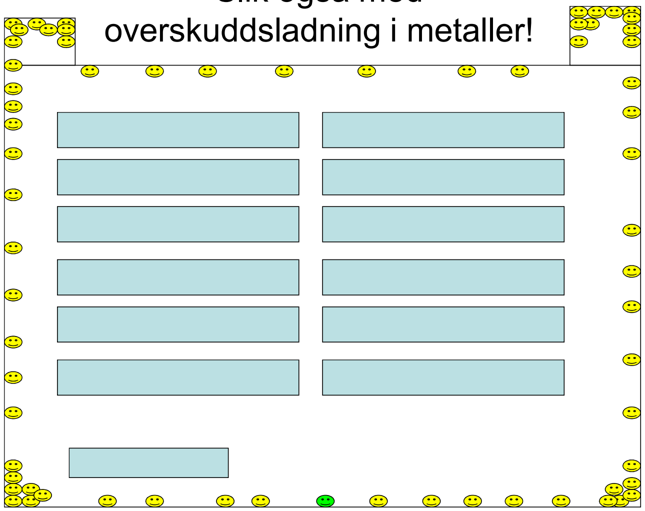
Totalt sett nøytralt

Auditoriet:
Hver av oss lades -1C

(Hvis samme e/m som elektron, ville vi ha ladning ~ -10^{13} C)

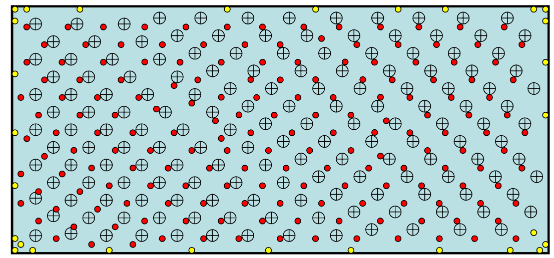


Slik også med overskuddsladning i metaller!



Elektrisk leder med valenselektroner

Negativt ladd metall: overskuddselektroner
Disse presses til overflata

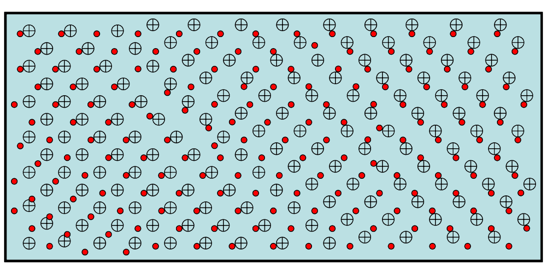


Totalt ladd negativt

Elektrisk leder med valenselektroner

Positivt ladd metall: underskudd av elektroner

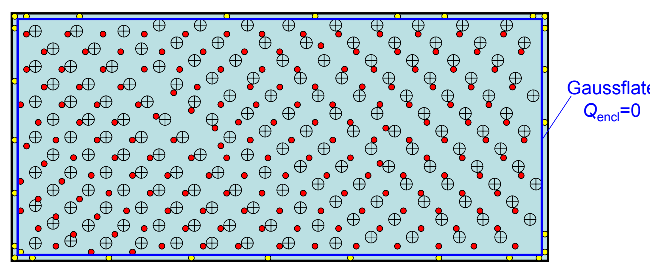
Underskuddet (positivt) presses også mot overflata



Totalt ladd positivt

Elektrisk leder med valenselektroner

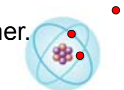
Negativt ladd metall: overskuddselektroner
Disse presses til overflata



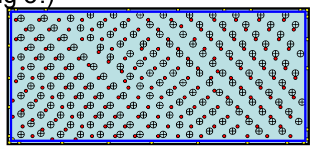
Totalt ladd negativt

Elektrisk ledere (metaller)

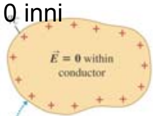
1. Metallatomer har ett eller flere frie valenselektroner.



2. Evt. overskuddselektroner skyves til overflata
   (=> kun overflateladning σ.)

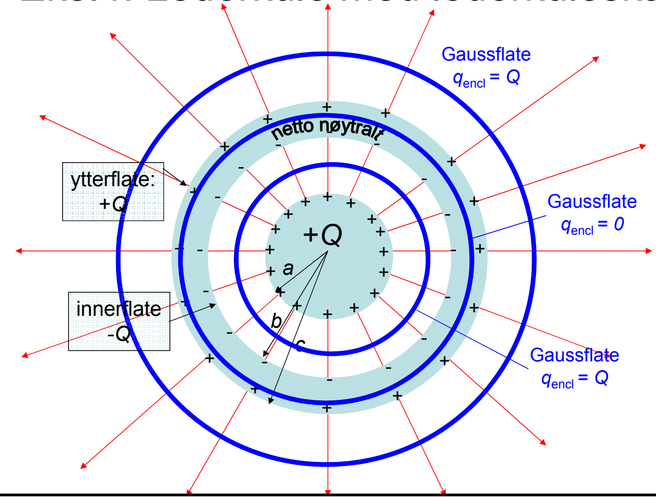


3. ρ= 0 og **E** = 0 inni



4. Rett utenfor overflata:
   kun **E** normal: $E_\perp = \sigma/\varepsilon_0$

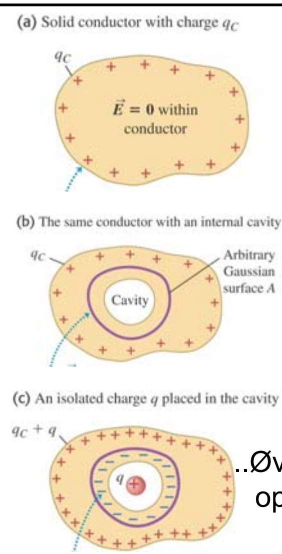
Eks.4: Lederkule med lederkuleskall



Feltet er null overalt inne i ledere

.. og inne i ladningsfrie hulrom i ledere.

.. men ikke i hulrom med ladning.



..Øving 3, opg. 2.

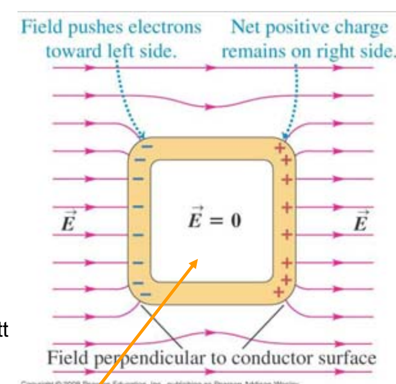
Y&F Fig 22.23

Nøytral leder i ytre *E*-felt

Ladninger forskyves akkurat så mye at:

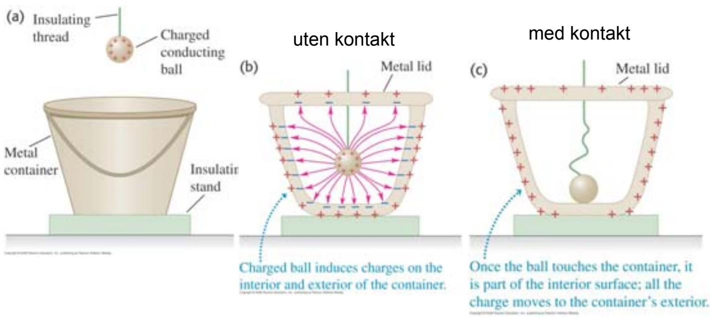
1) **E** = 0 i leder og hulrom

2) **E** normal på overflata rett utenfor



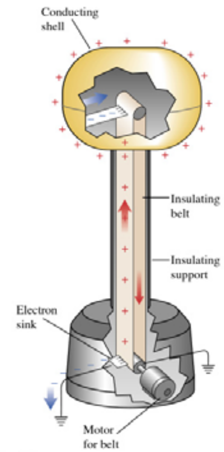
rom som er skjermet fra *E*-felt: **Faradaybur**

Ladningsinduksjon og overføring av ladning.
(Faradays bevis av Gauss' og Columbs lov)

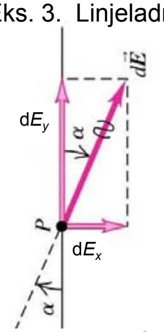


van de Graaf generator
(Y&F fig 22.26)

Ladning samles på *utsida* av metallkula, trenger bare tynt skall.



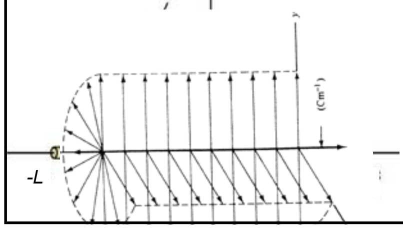
Kap 21. Eks. 3. Linjeladning



Generell løsning: $E_y = k\frac{\lambda}{y}\frac{2L}{\sqrt{L^2+y^2}}$

Nærme: $y \ll L \;\Rightarrow\; E_y = k\frac{2\lambda}{y}$

Nå med Gauss' lov



Oppsummering kap. 22. Gauss' lov

Fluks til $\vec{E}$ gitt ved flateintegral: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot d\vec{A}$

Gauss lov:

$$\text{Fluks ut av Gaussflate } S = \frac{1}{\epsilon_0}\cdot \text{ladning innenfor:}$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{(infinitesimal form:)} \quad \mathrm{div}\vec{E}\cdot dV = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\, dV$$

Gauss' lov enklere enn Coulombs lov når det er symmetri i ladning og/eller elektrisk felt.
Legg inn Gaussflate S slik at $\vec{E}||d\vec{A}$ eller $\vec{E}\perp d\vec{A}$

I **ledere** flytter ladninger seg tilnærmet uten motstand.
Like ladninger frastøter hverandre og legger seg på **overflata** av lederen.
Inni alle ledere er derfor $\rho = 0$ og $\vec{E} = \vec{0}$.