

Kap. 23 Elektrisk potensial

Skal definere på grunnlag av elektrisk felt \vec{E} :

- Elektrisk potensiell energi, U
- Elektrisk potensial, V
 - (Kretsteknikk: El. potensialforskjell = spenning)
- Ekvipotensialflater
- Potensialgradient og elektrisk felt.

Gravitasjon (punktmasser):

Kraft: $\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$ (alltid negativ)

Pot.energi: $U(\vec{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ (alltid negativ)

Elektrisitet (punktladninger):

Kraft: $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$ (Coul) (pos/neg)

Pot.energi: $U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$ (pos/neg)

Skal utlede $U(r)$

Kap. 23. Elektrisk potensial

- Elektrisk potensiell energi, U

Definisjon: $U_b - U_a = -W_{ab} = -q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (23.2)

Rundt pkt.ladning: $U_b - U_a = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$ (23.8)

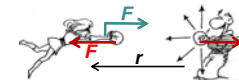
Rundt pkt.ladning, relativt $r_a = \infty$: $U(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ (23.9)

a = b: E -feltet er konservativt: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
(arbeid uavhengig vegen)

Eks. 1, forts. av: Hvor stor er 1 coulomb ?

- Du og din kamerat/venninde holder hver ei kule med ladning $+1,0 \text{ C}$. Dere beveger dere mot hverandre fra uendelig i et ellers elektrisk nøytralt rom
- a) Hvor nærme kan dere komme hverandre?
Anta dere kan trykke med $F = 500 \text{ N}$ hver. (Svar: 4,2 km)
- b) Hvor stort er det elektriske feltet i avstand 4,2 km? (Svar: 500 N/C)
- c) Hvor mye arbeid for å føre dere sammen fra $a = \infty$ til $b = 4,2 \text{ km}$? (anta en av dere står i ro)

Arbeid av elektrisk kraft F :



$$W = \int_a^b q_1 \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_1 k q_2 \int_a^b \frac{dr}{r^2} = -9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \cdot (1\text{C})^2 \left(\frac{1}{4,2 \text{ km}} - \frac{1}{\infty} \right) = -2,1 \text{ MJ}$$

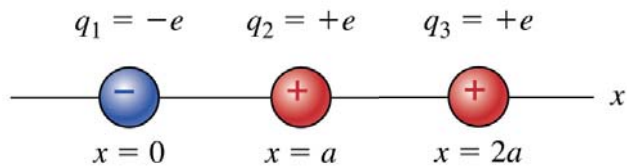
eller enklere fra

$$W = -U(b) = -k q_0 q \frac{1}{b} = -9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \cdot (1\text{C})^2 \cdot \frac{1}{4,2 \text{ km}} = -2,1 \text{ MJ}$$

«Vårt» arbeid = arbeid av F = $-W = 2,1 \text{ MJ}$

(som å løfte 100 kg 2,2 km opp, eller ca. $\frac{1}{4}$ av kroppens energibruk per dag)

Eks. 2 ≈ Y&F Ex. 23.2
To og tre punktladninger



- Finn potensiell energi til q_1 og q_2 (relativt ∞)
- Finn nødvendig arbeid for å plassere q_3
= potensiell energi for q_3 (i naboskap av q_1 og q_2)
- Finn total potensiell energi

Elektrisk potensial V ($= U/q_0$) :

Relativt potensial, fra def. av pot.en:

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (23.17)$$

Absolutt potensial (relativt ∞):

rundt én punktladning:
$$V(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (23.14)$$

rundt mange punktladninger:
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (23.15)$$

rundt kontinuerlig ladninger:
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dq}{r} \quad (23.16)$$

Eks. 3, forts. av:
Hvor stor er 1 coulomb ?

- Du og din kamerat/venninde holder hver ei kule med ladning $+1,0$ C. Dere beveger dere mot hverandre fra uendelig i et ellers elektrisk nøytralt rom
- a) Hvor nærme kan dere komme hverandre?
Anta dere kan trykke med $F = 500$ N hver. (Svar: 4,2 km)
- b) Hvor stort er det elektriske feltet i avstand 4,2 km? (Sv: 500 N/C)
- c) Hvor mye arbeid for å føre dere sammen fra $a=\infty$ til $b=4,2$ km?
(anta en av dere står i ro) (Sv: 2,1 MJ)
- d) Hva er potensialforskjellen mellom dere (ved $b=4,2$ km) ?

Enklest, fra utregnet arbeid i pkt c):

$$V = W/q_2 = 2,1 \text{ MJ} / 1,0 \text{ C} = \underline{2,1 \text{ MV}}$$

Eller fra potensial $V(r)$ rundt punktladning:

$$V(r) = k q_1 / r \\ = 9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \cdot 1,0 \text{ C} / 4,24 \text{ km} = 2,12 \text{ MV} = \underline{2,1 \text{ MV}}$$

Beregning av potensial:

Metode 1, Superposisjon av punktladninger (V rel. ∞):

diskrete ladninger:
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (23.15)$$

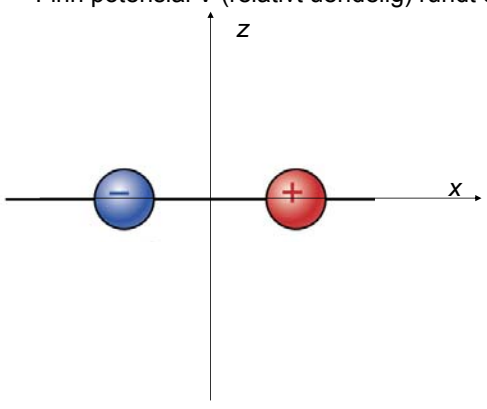
kontinuerlig ladninger:
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dq}{r} \quad (23.16)$$

$$V_b - V_a = V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a)$$

Metode 2: Fra definisjonen, når \vec{E} er kjent:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (23.17)$$

Eks. 4: V rundt dipol (mer i øving 4)
 Finn potensial V (relativt uendelig) rundt dipol



Metode 1:

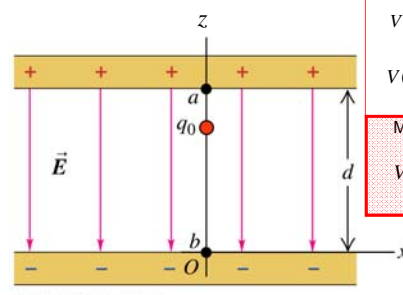
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Metode 2:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Eks.5: V mellom to (uendelige) parallelplater
 (Y&F Ex. 23.9)

E fra tidligere:
 $E = \sigma/\epsilon_0$



Metode 1:

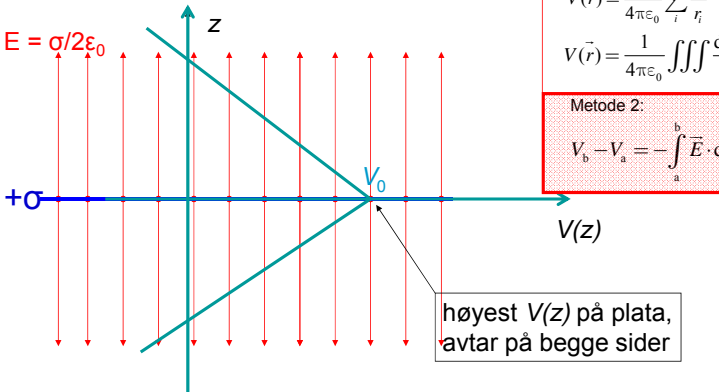
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Metode 2:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(Y&F Fig 23.18)

Eks 5B: Flateladning



Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Metode 2:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

høyest V(z) på plata, avtar på begge sider

Øving 3, opg. 1
 Coronautladning ved > 30 kV/cm



Fra http://en.wikipedia.org/wiki/Corona_discharge
 Corona discharge on insulator string of a 500 kV overhead power line.
 Corona discharges represent a significant power loss for electric utilities.

Eks.6: Vinni og utenfor ladet lederkule
(Y&F Ex. 23.8)

E fra Eks.3 i kap 22 (Ex. 22.5):

Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dq}{r}$$

Metode 2:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(Y&F Fig 23.17)

Eks.7: V på aksen til tynn ring
(Y&F Ex. 23.11)

Metode 1

fordi:
Vanskeligere å finne $E(x)$ (Eks. 4 kap 21) enn å finne $V(x)$

Resultat:

$$V(x) = k Q x / r \quad (21.8)$$

(Y&F Fig 23.21)

Eks. 4 kap 21:

$$E_x = k Q x / r^3 \quad (21.8)$$

Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dq}{r}$$

Metode 2:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Eks.8: Vinni og utenfor uniformt ladd kule

Metode 2

E fra Eks.1 i kap 22 (Ex. 22.9):

Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dq}{r}$$

Metode 2:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(Y&F Fig 22.22)

Eks.9: V rundt uendelig lang linjeladning (Y&F Ex 23.10)

E fra Eks.5, kap.22 (Ex.22.6):

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Metode 2

$$V(r) - V(r_0) = - \int_{r_0}^r E_r dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$

Referansepunkt r_0 :
 ∞ og 0 er begge ubrukelige.

Metode 1:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

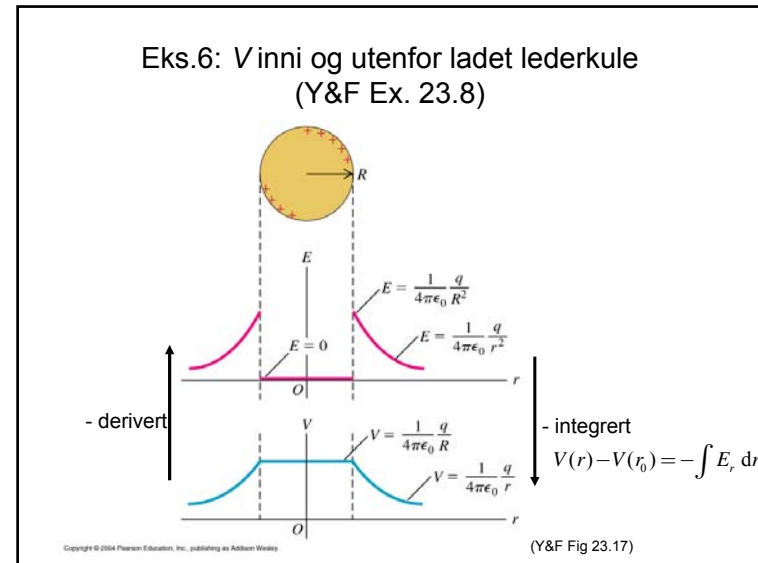
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dq}{r}$$

Metode 2:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Eksempler
i forelesning (Eks...), Y&F Ed13 (Ex...), og Lillestøl (L...)

	Kap 21. E-felt	Kap 22. Gauss lov	Kap 23. Potensial
Dipol	Eks. 2 Ex. 21.8+21.14 L19.6		Eks. 4 Ex. 23.4 Met 1
Linjeladning endelig	Eks. 3 Ex. 21.10		Ex. 23.12
Linjeladning uendelig	(Eks. 3) L19.7	Eks. 5 Ex. 22.6, L19.13	Eks. 9 Ex. 23.10 Met 2
Tynn ring	Eks. 4 Ex. 21.9		Eks. 7 Ex. 23.11 Met 1 Met 2: Eks. 7B
Sirkulær plate	Eks. 5 Ex. 21.11		
Uendelig plate	Eks. 6 Ex. 21.11 L19.9	Eks. 2 Ex. 22.7 L19.14	Eks. 5B L19.15 Met 2
Parallellplater	Ex. 21.12 Eks. 7	Ex. 22.8	Eks. 5 Ex. 23.9 Met 2
Kule med homogen ladning		Eks. 1 Ex. 22.9, L19.12	Eks. 8 L19.19 Met 1: Eks. 8B
Lederkule		Eks. 3 Ex. 22.5	Eks. 6 Ex. 23.8 Met 2 Met 1: Eks. 6B



Gradienten til en skalar er en vektor:
(fra formelsamling s. 2):

Kartesiske koord:

$$\text{grad}V = \vec{\nabla}V = \hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z}$$

Sylinderkoord:

$$\vec{\nabla}V = \hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z}$$

Kulekoord:

$$\vec{\nabla}V = \hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

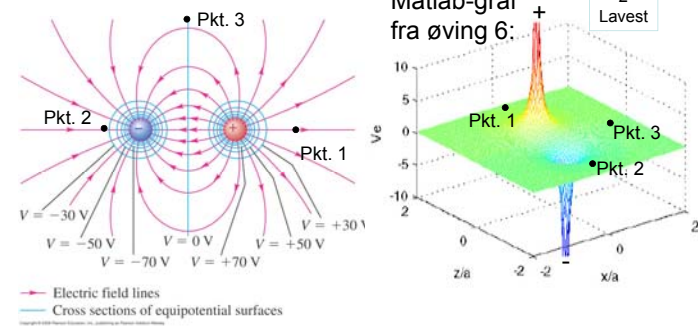
Ekvipotensialflater

= flater med innbyrdes konstant potensial

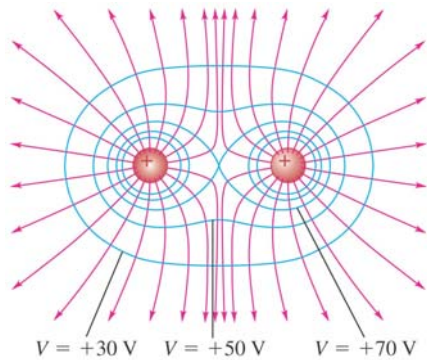
Gravitasjonen har også ekvipotensialflater.
Høydekoter på kart er skjæring mellom epf. og terrenget:



Dipol



To positive ladninger



Electric field lines
Cross sections of equipotential surfaces

(Y&F Fig 23.24)

Kap. 23: Oppsummering 1 Elektrisk potensial

Arbeid av el.kraft $q\vec{E}$ er kun avhengig av start-(a) og slutt (b) posisjon

$$\Downarrow$$

Alle E -felt er konservative: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$

\Downarrow

Kan definere:

Elektrisk potensial = $\frac{\text{elektrisk potensiell energi}}{\text{ladning}}$

$$V_{ba} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

\Downarrow

$$\vec{E} = -\text{grad}V$$

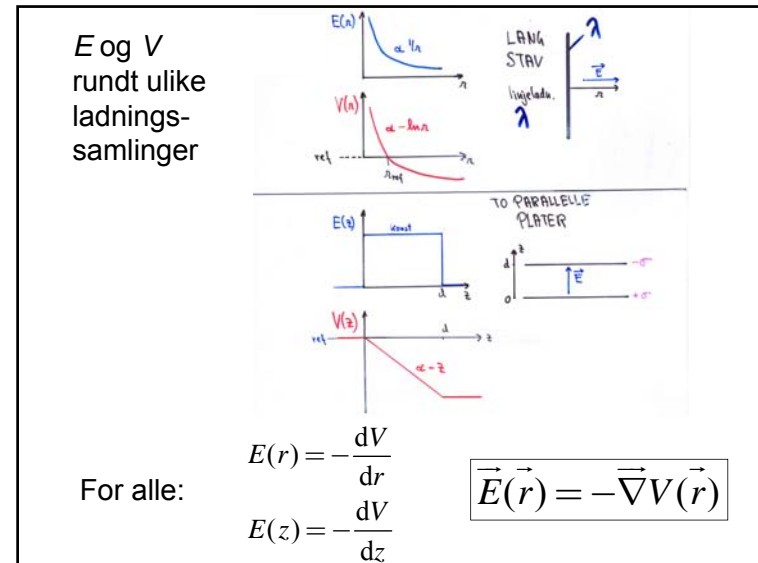
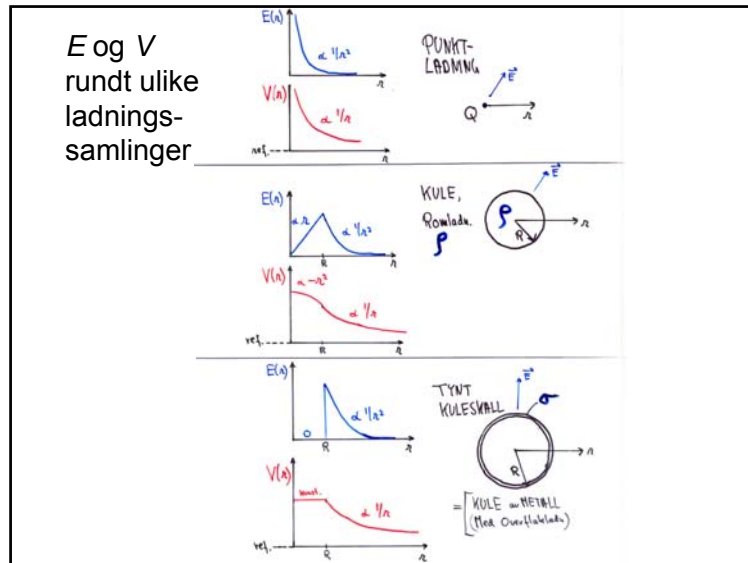
Enhet: $[V] = J / C = \text{volt} = V$

Energienheter:

1 CV = tilleggsenergi for 1C ved å flytte 1 V høyere = 1 J

1 eV = tilleggsenergi for 1e ved å flytte 1 V høyere = 0,16 aJ

Absolutt potensial definert relativt $r = \infty$



Kap. 23: Oppsummering 2

Elektrisk potensial

Beregning av potensial:

Metode 1: Superposisjon, romlig integrasjon: $V(r) = k \iiint \frac{dq}{r}$.

Metode 2: Linjeintegral, når \vec{E} er kjent: $V_{ba} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$.

- **Løsningsmetodikk for E og V:**
 Hvis E enkel å finne (eks. fra Gauss' lov): Bestem E, deretter V fra Metode 2.
 Hvis V enkel å finne (fra metode 1): Bestem V, deretter E fra $E = -\text{grad } V$
- Ladninger kan flyttes uten arbeid på **ekvipotensialflater**.
- E er normal til ekvipotensialflater.
- Elektrisk **leder** er på en og samme potensialflate.

