Notat 7: Elektromagnetiske bølger

Siden Young & Freedman presenterer kun Maxwells likninger på integralform, er også utledningen av elektromagnetiske bølger (emb.) i kap. 32 basert på integralformen. Utledning av emb. fra differensialformen av Maxwells likninger er mer elegant og ble vist i forelesning og presenteres her. Lillestøl, Hunderi og Lien presenterer denne utledningen i kap. 28.1 og Griffiths i kap. 9.2. Utledningen av bølgelikningen er ikke eksamensrelevant pensum, men formelapparatet må forstås og beskrivelsen og tolkningen av en planpolarisert bølge er pensum.
A.Mikkelsen 13.04.15.

I områder hvor vi ikke har ladninger eller strømmer vil Maxwells likninger på differensialform lyde (se også Notat 4, Maxwells likninger):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,. \tag{4}$$

Med $\vec{\nabla}\times$ (likn. 4) får vi

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right),$$

der $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$ (f.eks. fra Rottmann). Fra likn. (1) er $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ og fra likn. (3) er $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Dette gir

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\,. \tag{5}$$

Vi kunne brukt $\vec{\nabla}\times$ (likn. 3) og ved tilsvarende framgangsmåte komme fram til

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\,. \tag{6}$$

Likn. (5) og (6) er bølgelikninger i *tre dimensjoner* for henholdsvis $\vec{E}$ og $\vec{B}$. Vi gjenkjenner bølgelikningen for én dimensjon med utbredelse i x-retning: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, og dermed at bølgefarten for den emb. er $v = c$ der $c^2 = \frac{1}{\mu\epsilon}$.

For å studere likn. (5) som bølgelikning i én dimensjon merker vi oss først: Laplaceoperatoren ∇^2 på en skalar er definert

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

mens Laplaceoperatoren ∇^2 på en vektor er definert

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla^2 E_x\,\hat{\mathbf{i}} + \nabla^2 E_y\,\hat{\mathbf{j}} + \nabla^2 E_z\,\hat{\mathbf{k}}\,. \tag{7}$$

Det betyr at likn. (5) er en bølgelikning for hver komponent E_x, E_y og E_z.

La oss ta for en éndimensjonal bølge (planbølge) i $\pm x$-retning. Den kan beskrives av bølgefunksjonen

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(kx \mp \omega t)\,. \tag{8}$$

Maxwellikningene gir visse restriksjoner på $\vec{E}$ og $\vec{B}$: Først, likn. (1) gir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0\,.$$

Siden $\vec{E}(x,t)$ er avhengig kun av x er de to siste leddene null, og for å få null divergens må da $E_x = 0$. $\vec{E}_0$ har derfor kun y og z-komponenter, mao. bølgen er *transversal.* Likn. (2) gir det samme for $\vec{B}$. Alle emb. er transversale.

Vi velger oss $\vec{E}_0$ i y-retning, dvs. en éndimensjonal bølge planpolarisert i y-retning. Bølgefunksjonene kan da uttrykkes:

$$\vec{E}(x,t) = E_0\,\hat{\mathbf{j}}\,\cos(kx \mp \omega t)\,, \qquad \vec{B}(x,t) = B_0\,\hat{\mathbf{k}}\,\cos(kx \mp \omega t)\,. \tag{9}$$

At $\vec{B}_0 = B_0\,\hat{\mathbf{k}}$ bevises fra likn. (3):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \quad \overset{\text{kun } x\text{-avh.}}{=} \quad \frac{\partial B_y}{\partial x}\,\hat{\mathbf{k}} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\,\hat{\mathbf{j}} \overset{(3)}{=} \mu\epsilon E_0\,\hat{\mathbf{j}}\,(\pm\omega)\sin(kx \mp \omega t)$$

som gir at

$$B_y = 0, \qquad B_z = B_0 \cos(kx \mp \omega t) \qquad \text{med} \qquad B_0 = \pm\frac{\omega}{k}\mu\epsilon E_0 = \pm c\frac{1}{c^2}E_0 = \pm\frac{E_0}{c}. \tag{10}$$

Tilsvarende vil vi finne for en bølge med $\vec{E}$ planpolarisert i z-retning:

$$\vec{E}(x,t) = E_0\,\hat{\mathbf{k}}\,\cos(kx \mp \omega t)\,, \qquad \vec{B}(x,t) = -B_0\,\hat{\mathbf{j}}\,\cos(kx \mp \omega t)\,.$$

også her med

$$B_0 = \pm\frac{E_0}{c}.$$

Merk at i begge tilfellene vil bølgens gangretning være i samme retning som $\vec{E} \times \vec{B}$, og dette gjelder for alle emb.

Se figurer/skisser i kopi av powerpoint-slides.