Kap. 22.
Gauss' lov

Vi skal se på:

- Fluksen til elektrisk felt ***E***
- Gauss' lov
  - Integralform og differensialform
- Elektrisk ledere.

E-felt fra Coulombs lov:

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\cdot\hat{r} \qquad \vec{E} = k\sum_n \frac{q_n}{r_{0n}^{\,2}}\hat{r}_{0n} \qquad \vec{E} = k\int_{tot.ladn.} \frac{\mathrm{d}q}{r^2}\cdot\hat{r}$$

Punktladn Flere punktladn. Kontinuerlig fordeling

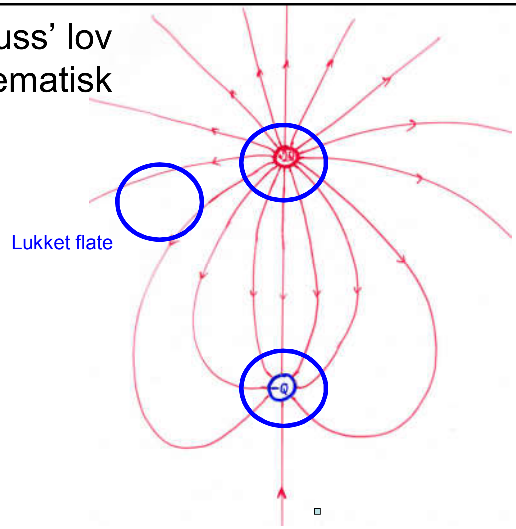
Blir lett vanskelig integrasjonsarbeid.
En enklere metode?

Ja: Gauss' lov

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), tysk matematiker / fysiker

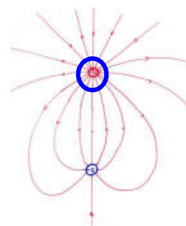
---

Gauss' lov skjematisk



Gauss' lov

Gjelder lukkede flater.



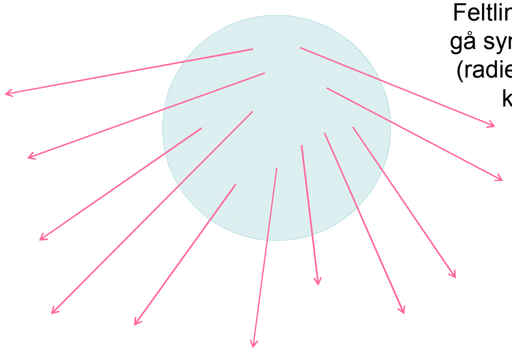
- Antall feltlinjer ut – ant. feltlinjer inn
  prop. med: ladning innenfor.
- Netto fluks ut = $1/\varepsilon_0 \cdot$ (ladn. innenfor)
- Integralform: $\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\mathrm{encl}}$

Eks.1: Homogent ladd kule

=Y&F Ex. 22.9 = LHL 19.12

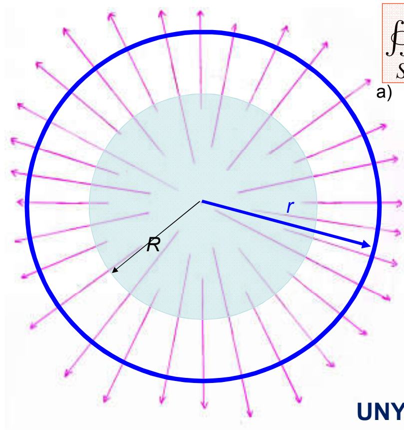
UMULIG LØSNING

Feltlinjene må gå symmetrisk (radielt) ut fra kula.



Eks.1: Homogent ladd kule

=Y&F Ex. 22.9 = LHL 19.12



$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\mathrm{encl}}$$

a) Utenfor kula $r > R$:

$q_{\mathrm{encl}} = Q$

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

b) Inni kula $r < R$:

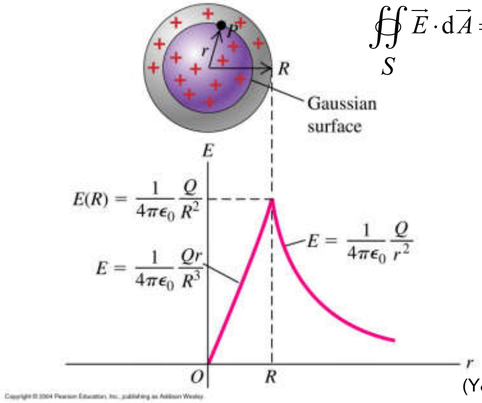
q_{encl} er mindre

$q_{\mathrm{encl}} = Q\, r^3/R^3$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$$

UNYTTIG

Eks.1: Homogent ladd kule



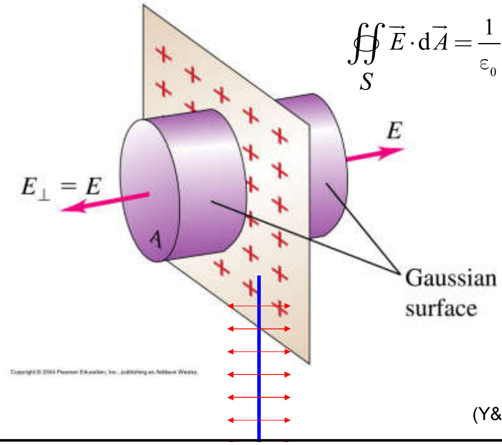
$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\mathrm{encl}}$$

(Y&F Fig 22.22)

Eks.2: Felt nær flateladning

=Y&F Ex. 22.7 = LHL 19.14

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\mathrm{encl}}$$



(Y&F Fig 22.20)

Eksempler
i forelesning (Eks…), Y&F Ed13 (Ex…), og LHL (L…)

	Kap 21. *E*-felt	Kap 22. Gauss lov	Kap 23. Potensial
Dipol	Eks. 2 Ex. 21.8+21.14 L19.6		Eks. 4 Ex. 23.4
Linjeladning endelig	Eks. 3 Ex. 21.10		Ex. 23.12
Linjeladning uendelig	(Eks. 3) L19.7	Eks. 5 Ex. 22.6, L19.13	Eks. 9 Ex. 23.10
Tynn ring	Eks. 4 Ex. 21.9		Eks. 7 Ex. 23.11
Sirkulær plate	Eks. 5 Ex. 21.11		
Uendelig plate	Eks. 6 Ex. 21.11 L19.9	Eks. 2 Ex. 22.7 L19.14	Eks. 5B L19.15
Parallellplater	Ex. 21.12 Eks. 7	Ex. 22.8	Eks. 5 Ex. 23.9
Kule med homogen ladning		Eks. 1 Ex. 22.9 L19.12	Eks. 8 L19.19
Lederkule		Eks. 3 Ex. 22.5	Eks. 6 Ex. 23.8

Ladningstettheter:

	Symbol	Enhet	Infinitesimal ladning
Linje-	λ	C/m	$dq = \lambda\, dl$
Flate-	σ	C/m^2	$dq = \sigma\, dA$
Rom-	ρ	C/m^3	$dq = \rho\, d\tau$

I elmag brukes V for potensial, slik at vi velger τ for volum (!)

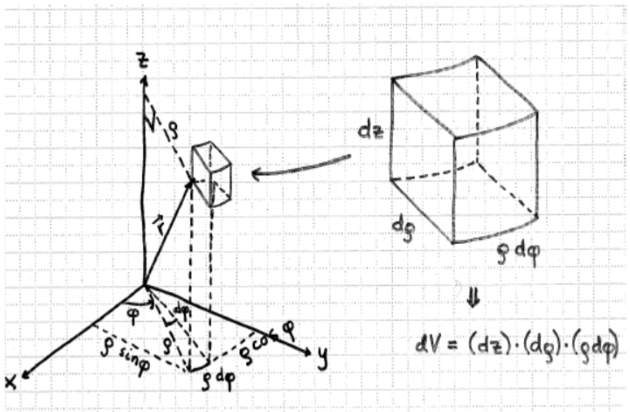
Eks.: Romladning

$$q_{\text{encl}} = \int dq = \iiint \rho\, d\tau$$

med høvelig volumelement $d\tau$

Sylinderkoordinater (r,φ,z)

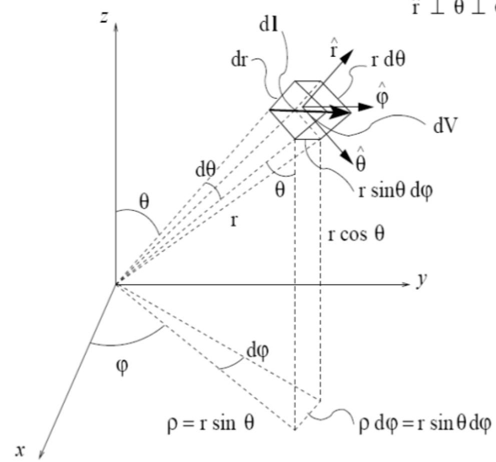
Figur: Støvneng
bruker ρ isf. r



Kulekoordinater $(r,\ \theta,\ \varphi)$

Figur: Støvneng

$\hat{r} \perp \hat{\theta} \perp \hat{\varphi}$



Infinitesimale volumelement

Kartesiske koordinater: $d\tau = dx\, dy\, dz$

Sylinderkoordinater: $d\tau = r\, d\varphi \cdot dr \cdot dz$

Integrert over φ: $d\tau = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r\, dr \cdot dz = 2\pi r\, dr\, dz$

Når sylindersymmetri bruk alltid dette uttrykket:

$$\boxed{d\tau = 2\pi r\, dr\, l = \text{omkrets} \cdot \text{tykkelse} \cdot \text{høyde}}$$

Kulekoordinater: $d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin\theta\, d\varphi = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, r^2\, dr$

Integrert over θ og φ: $d\tau = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r^2\, dr = 2 \cdot 2\pi \cdot r^2\, dr$

Når kulesymmetri bruk alltid dette uttrykket:

$$\boxed{d\tau = 4\pi\, r^2\, dr \;= \text{kuleareal} \cdot \text{tykkelse}}$$

se også formelark

Gauss' lov

- **Integralform**: $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{encl}$

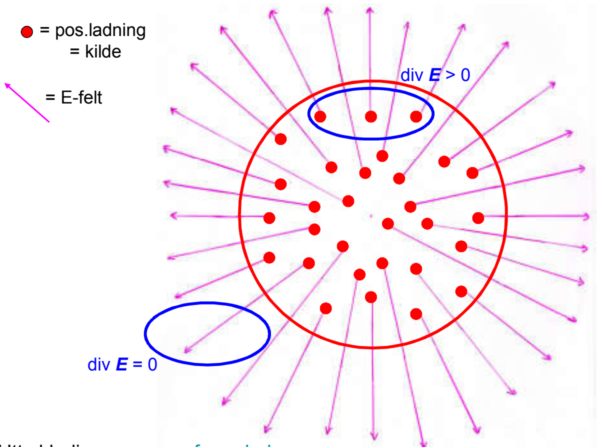
  Fluks ut = $1/\varepsilon_0$ · (ladn. innenfor)

- **Differensialform**: $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

  $\mathrm{div}\vec{E} =$ divergensen til ***E***

Dette er Maxwells likning nr. 1.

divergens = kilde



Uttrykk divergens, se formelark

Gauss' lov på differensialform:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \;= \text{divergensen til } \vec{E}$$

Divergensen med nablaoperator:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

Kartesiske koordinater:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[E_x, E_y, E_z\right]$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Sylinder- og kulekoordinater: Se formelark.

Kun r-avhengighet aktuelt ($\partial/\partial r$).

Oppsummering kap. 22. Gauss' lov

Fluks til ***E*** definert ved flateintegral: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Gauss' lov: (fluks ut av gaussflate *S*) = $1/\varepsilon_0$ (ladning innenfor)

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\mathrm{encl}}$$

Infinitesimal form: $\mathrm{div}\,\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\,\mathrm{d}\tau$

Gauss' lov er enklere enn Coulombs lov når det er symmetri i ladning og/eller i elektrisk felt.
Legg inn gaussflate slik at ***E*** || d***A*** eller ***E*** ⊥ d***A***

I dag
ledere flytter ladninger seg tilnærmet uten motstand.
Like ladninger frastøter hverandre og legger seg på **overflata** av lederen.
Inni alle ledere er derfor $\rho = 0$ og ***E*** = **0**.

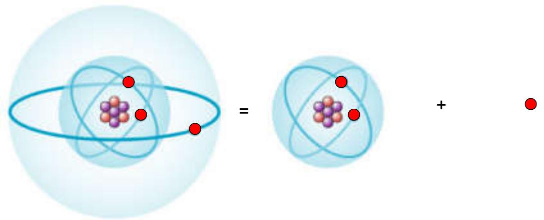
Elektrisk leder med valenselektroner

Et metallatom:

Ett elektron frigjøres lett (valenselektron)

Eksempel litium:

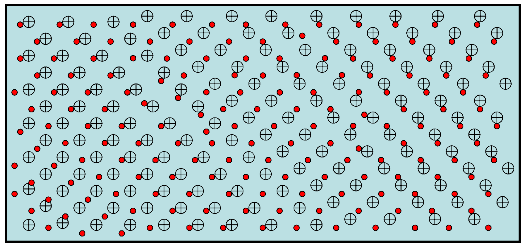
Nøytralt atom = positivt ladd ion + fritt elektron (valenselektron)



Elektrisk leder med valenselektroner

Et metallatom:
(eks Li)
Ett elektron frigjøres lett (valenselektron)

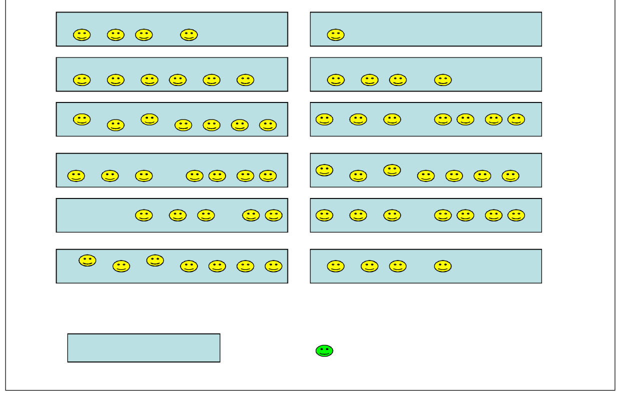
og valenselektronene beveger seg fritt i metallet:



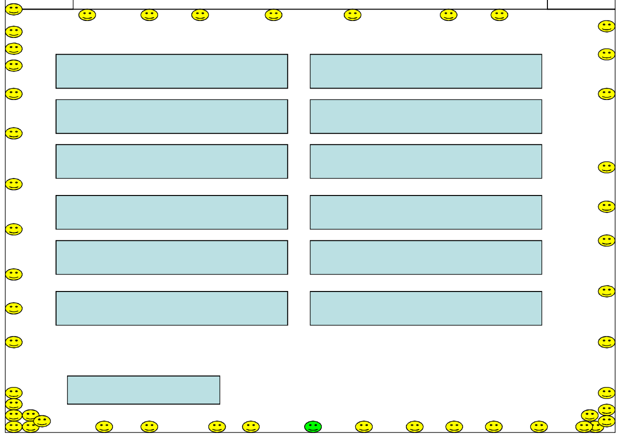
Totalt sett nøytralt

Auditoriet:
Hver av oss lades -1C

(Hvis samme q/m-forhold som et elektron, ville vi hatt ladning ~ 10^{13} C !!)

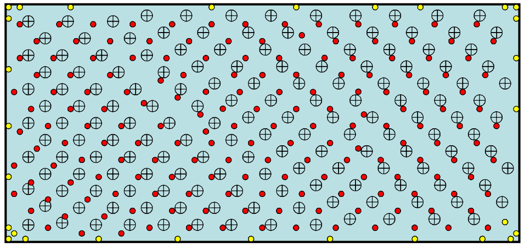


Slik også med
overskuddsladning i metaller!



Elektrisk leder med valenselektroner

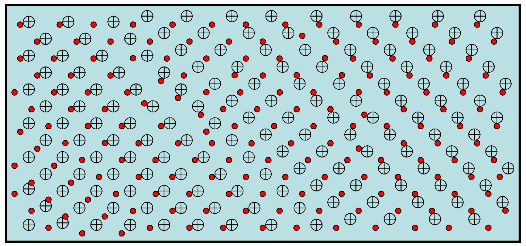
Negativt ladd metall: overskuddselektroner
Disse presses til overflata



Totalt ladd negativt

Elektrisk leder med valenselektroner

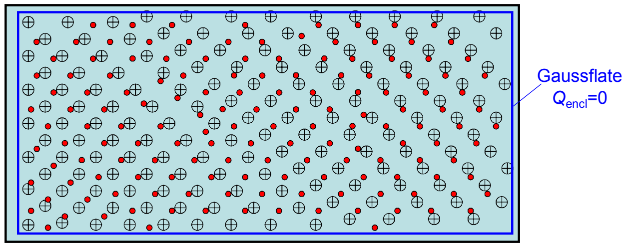
Positivt ladd metall: underskudd av elektroner
Underskuddet (positivt) presses også mot overflata



Totalt ladd positivt

Elektrisk leder med valenselektroner

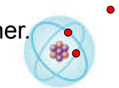
Positivt ladd metall: underskudd av elektroner
Underskuddet (positivt) presses også mot overflata



Totalt ladd positivt

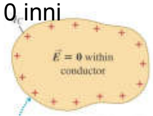
Elektrisk ledere (metaller)

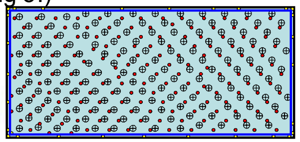
1. Metallatomer har ett eller flere frie valenselektroner.



2. Evt. overskuddselektroner skyves til overflata (=> kun overflateladning σ.)

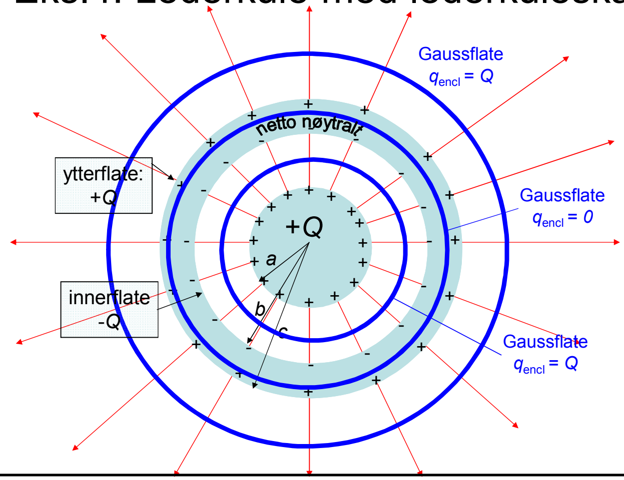
3. ρ= 0 og ***E*** = 0 inni





4. Rett utenfor overflata:
   kun ***E*** normal: $E_{\perp} = \sigma/\varepsilon_0$

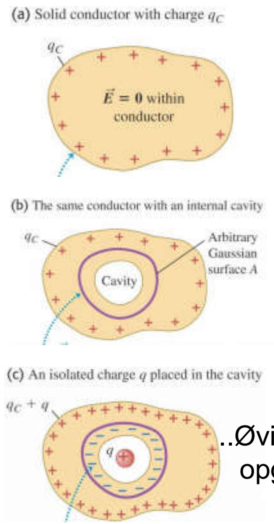
Eks.4: Lederkule med lederkuleskall



Feltet er null overalt inne i ledere

.. og inne i ladningsfrie hulrom i ledere.

.. men ikke i hulrom med ladning.



..Øving 3, opg. 2.

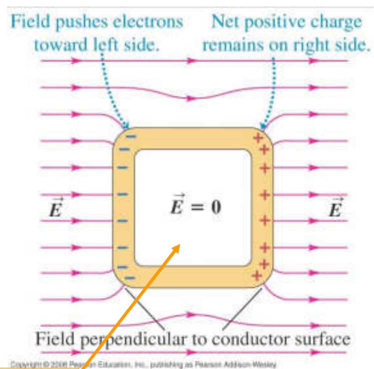
Y&F Fig 22.23

Nøytral leder i ytre *E*-felt

Ladninger forskyves akkurat så mye at:

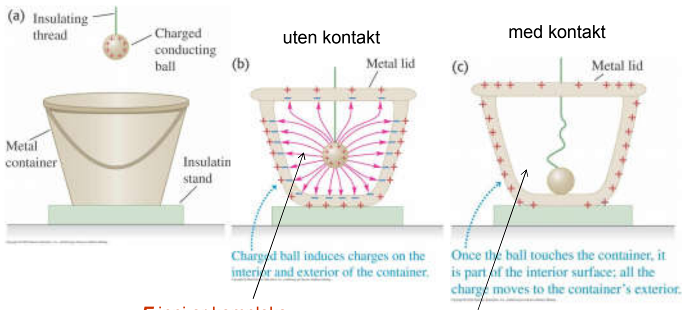
1) ***E*** = 0 i leder og hulrom

2) ***E*** normal på overflata rett utenfor



rom som er skjermet fra *E*-felt: **Faradaybur**

Ladningsinduksjon og overføring av ladning.
(Faradays bevis av Gauss' og Columbs lov)

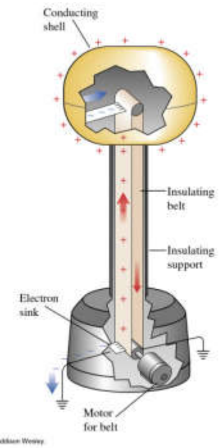


E inni er kompleks

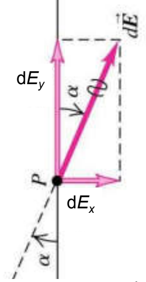
E =0 inni

van de Graaff generator
(Y&F fig 22.26)

Ladning samles på *utsida* av metallkula, trenger bare tynt skall.



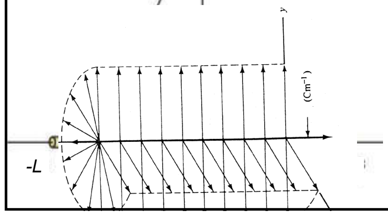
Kap 21. Eks. 3. Linjeladning



Generell løsning: $E_y = k\dfrac{\lambda}{y}\dfrac{2L}{\sqrt{L^2+y^2}}$

Nærme: $y \ll L \;\Rightarrow\; E_y = k\dfrac{2\lambda}{y}$

Nå med Gauss' lov



Oppsummering kap. 22. Gauss' lov

Fluks til ***E*** definert ved flateintegral: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Gauss' lov: (fluks ut av gaussflate *S*) = $1/\varepsilon_0$ (ladning innenfor)

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\mathrm{encl}}$$

Infinitesimal form: $$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Gauss' lov er enklere enn Coulombs lov når det er symmetri i ladning og/eller i elektrisk felt.
Legg inn gaussflate slik at ***E*** || d***A*** eller ***E*** ⊥ d***A***

I **ledere** flytter ladninger seg tilnærmet uten motstand.
Like ladninger frastøter hverandre og legger seg på **overflata** av lederen.
Inni alle ledere er derfor ρ = 0 og ***E*** = **0**.