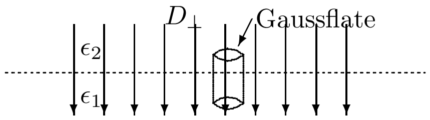
# Notat 6: Grenseflatevilkår ("boundary conditions")

Grenseflatevilkår for $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ og $\vec{H}$ er ikke behandlet i Young & Freedman. Lillestøl, Hunderi og Lien har en kort presentasjon i kap 28.2, Griffiths bl.a. i kap. 7.3.6. Her følger et sammendrag, omtrent så langt som i forelesninger. Anvendes bl.a. i oppgaver i regneøving 7 ($D$ og $E$-felt) og regneøving 12 ($B$ og $H$-felt). A.Mikkelsen 14. mars -16.

I overflata mellom to ulike medier med ulike $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ og/eller $\mu = \mu_r \mu_0$ følger vi normalkomponenten og tangential(parallell)komponenten til de ulike feltstørrelser $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ og $\vec{H}$, betegnet henholdsvis $E_\perp$, $E_\parallel$ etc. Vi tar først de enkelste tilfellene med grenseflater uten (frie) ladninger og uten overflatestrømmer:

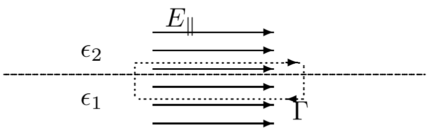
**Grenseflate uten ladninger og uten strømmer på overflata:**

$\boxed{D_\perp = \text{kontinuerlig} \quad (E_\perp = D_\perp/\epsilon)}$



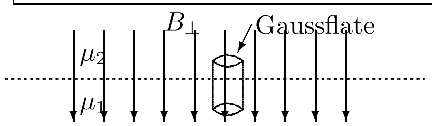

*Bevis:* $\vec{D}$ har kilde/sluk i frie ladninger. Uten frie ladninger er det ingen nye feltlinjer, $D_\perp$ må være kontinuerlig. Evt. ved Gauss' lov: $\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$ på en sylinder normalt på grenseflata med en endeflate i hvert medium.

$\boxed{E_\parallel = \text{kontinuerlig} \quad (D_\parallel = \epsilon E_\parallel)}$



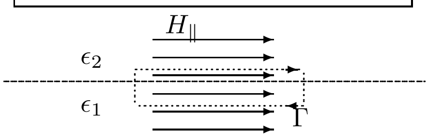

*Bevis:* Sirkulasjonsloven $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$. Legg inn et rektangel normalt på overflata med en langside (lengde $\ell$) på hver side av grenseflata. Se figur: $E_{\parallel,2} \cdot \ell + 0 - E_{\parallel,1} \cdot \ell + 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_{\parallel,1} = E_{\parallel,2}$

$\boxed{B_\perp = \text{kontinuerlig} \quad (H_\perp = B_\perp/\mu)}$




*Bevis:* $\vec{B}$ har ingen kilder/sluk, feltlinjene er kontinuerlige og derfor $B_\perp$ kontinuerlig. Evt. ved Gauss' lov: $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$ på en sylinder normalt på grenseflata med en endeflate i hvert medium.

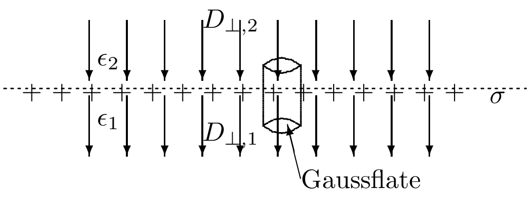
$\boxed{H_\parallel = \text{kontinuerlig} \quad (B_\parallel = \mu E_\parallel)}$




*Bevis:* Sirkulasjonsloven $\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = I = 0$ (ingen strøm). Legg inn et rektangel normalt på overflata med en langside (lengde $\ell$) på hver side av grenseflata. Se figur: $H_{\parallel,2} \cdot \ell + 0 - H_{\parallel,1} \cdot \ell + 0 = 0 \quad \Leftrightarrow$ $H_{\parallel,1} = H_{\parallel,2}$

**Grenseflate med overflateladning $\sigma$:**

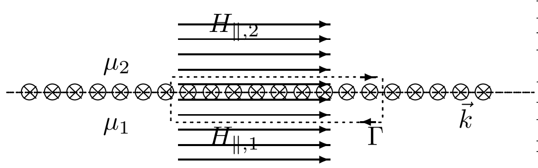
$\boxed{\Delta D_\perp = \sigma}$




*Bevis:* $\vec{D}$ har kilde/sluk i frie ladninger. Gauss' lov: $\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q$ på en sylinder normalt på grenseflata med en endeflate (areal $A$) i hvert medium: Fluks(ut) - Fluks(inn) = $Q_{\mathrm{encl}}$
$\Leftrightarrow \quad D_{\perp,1}A - D_{\perp,2}A = \sigma A \quad \Leftrightarrow \quad \Delta D_\perp = D_{\perp,1} - D_{\perp,2} = \sigma$.
Hvis $\vec{D}$-feltet i området er kun fra flateladningen $\sigma$ (ingen ytre felt) må $D_{\perp,2}$ og $D_{\perp,1}$ ha motsatt fortegn (peke i hver sin retning ut fra flata) og ha størrelse $D_{\perp,2} = D_{\perp,1} = \sigma/2$.

**Grenseflate med overlatestrøm $k$ (A/m) langs overflata:**

$\boxed{\Delta H_\parallel = k \text{ (} H \text{ parallell med overflata og normal på overflatestrømmen } k\text{)}}$




*Bevis:* Sirkulasjonsloven $\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = I$ . Legg inn integrasjonsveg $\Gamma$ = rektangel normalt på overflata med en langside (lengde $\ell$) på hver side av grenseflata. Se figur:
$H_{\parallel,1} \cdot \ell + 0 - H_{\parallel,2} \cdot \ell + 0 = k \cdot \ell \quad \Leftrightarrow \quad \Delta H_\parallel = H_{\parallel,1} - H_{\parallel,2} = k$.
Hvis $\vec{H}$-feltet i området er kun fra flatestrømmen $k$ (ingen ytre felt) må $H_{\parallel,2}$ og $H_{\parallel,1}$ ha motsatt fortegn (hver sin retning) og ha størrelse $H_{\parallel,2} = H_{\parallel,1} = k/2$.