

Siden Young & Freedman presenterer kun Maxwells likninger på integralform, er også utledningen av elektromagnetiske bølger (emb) i kap. 32 basert på integralformen. Utledning av emb fra differensialformen av Maxwells likninger er mer elegant og ble vist i forelesning og presenteres her. Lillestøl, Hunderi og Lien presenterer denne utledningen i kap. 28.1 og Griffiths i kap. 9.2. Utledningen forutsetter forståelse av endimensjonal bølgelikning og løsningen av denne (bølgefunktjonen). A.Mikkelsen 1.04.16.

I områder hvor vi ikke har ladninger eller strømmer vil Maxwells likninger lyde (se også Notat 4: Maxwells likninger):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad (1)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu\epsilon \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad (4)$$

I det videre bruker vi kun differensialformene. Merk at vi her finner perfekt symmetri mellom $\mu\epsilon \vec{E}$ og $-\vec{B}$!

Utfører først $\vec{\nabla} \times$ (likn. 4). Fra f.eks. Rottmann er $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$, slik at vi får

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \qquad (5)$$

Fra likn. (1) er $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ og fra likn. (3) er $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Dette gir

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \qquad (6)$$

Vi kunne brukt $\vec{\nabla} \times$ (likn. 3) og ved tilsvarende framgangsmåte kommet fram til

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \qquad (7)$$

som bekrefter symmetrien i \vec{E} og \vec{B} .

Dette likner mye på bølgelikningen i én dimensjon med utbredelse i x -retning, dvs. følgende likning for $y(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad (8)$$

Likn. (6) og (7) er bølgelikninger i *tre dimensjoner* for henholdsvis \vec{E} og \vec{B} , og ved sammenlikning med (8) ser vi at bølgefarten er v er bestemt av $1/v^2 = \mu\epsilon$. Vi bruker oftest $c = v$ for bølgefarten til emb¹ slik at $c = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}}$.

For å studere likn. (6) som bølgelikning i én dimensjon, merker vi oss først: Laplaceoperatoren ∇^2 på en skalar er definert

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

mens Laplaceoperatoren på en vektor er definert

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} \hat{i} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} \hat{j} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \hat{k}.$$

¹I vakuum er bølgefarten $c_0 = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 8,854187818 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}}} = 299\,792\,458 \text{ m/s}$. Dette er en eksakt verdi

for c_0 gjennom definisjon av 1 meter. M.a.o. har tomromspermittiviteten verdi fra denne definisjonen: $\epsilon_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu_0 c_0^2}$.

I vann (og andre materialer) er permittiviteten større enn ϵ_0 og avhengig av bølgens frekvens ω . Synlig lys i vann har $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \approx 1,8 \cdot \epsilon_0$ og dermed er lysfarten $c = \sqrt{\frac{1}{1,8}} \cdot c_0 = \frac{c_0}{1,34} = 0,75 \cdot c_0$. Brytningsindeksen er definert $n = \frac{c_0}{c}$, som altså i dette tilfellet blir 1,34.

Det betyr at likn. (6) er en bølgelikning for hver komponent E_x, E_y og E_z . F.eks. for x -komponenten:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Hvis dette er eneste del av bølgen har vi en éndimensjonal bølge (planbølge) i $\pm x$ -retning. Løsningen er, med $\omega/k = c$ (kjent fra bølgefysikken):

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(kx \mp \omega t) \quad (10)$$

med (generelt) $\vec{E}(x, t) = [E_x(x, t), E_y(x, t), E_z(x, t)]$.

Men Maxwelllikningene gir bestemte restriksjoner på $\vec{E}(x, t)$. Først, ifølge likn. (1) skal \vec{E} være divergensfritt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Siden $\vec{E}(x, t) = [E_x(x, t), E_y(x, t), E_z(x, t)]$ er avhengig av kun x er de to siste leddene uansett null, og for å få null divergens må da $E_x = 0$. Derfor kan $\vec{E}(x, t)$ og \vec{E}_0 ha kun y - og z -komponenter, dvs. normalt på bølgeretningen, og bølgen er *transversal*. Alle emb er transversale!

Hvis vi *velger* oss \vec{E}_0 i y -retning - dvs. en éndimensjonal bølge \vec{E} planpolarisert i y -retning - kan bølgefunksjonen (10) uttrykkes

$$\underline{\vec{E}(x, t) = E_0 \hat{j} \cos(kx \mp \omega t)}.$$

Tilsvarende analyse av bølgelikningen for \vec{B} (likn. 7) gir den endimensjonale bølgefunksjonen

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \cos(kx \mp \omega t).$$

Likn. (2) gir samme restriksjon som for \vec{E} , nemlig at $\vec{B}(x, t)$ og \vec{B}_0 kan ha kun y - og z -komponenter.

Med $\vec{B}(x, t)$ kun avhengig av x og vårt valg $\vec{E}(x, t) = E_0 \hat{j} \cos(kx \mp \omega t)$, gir likn. (3)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{k} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{j} \stackrel{(3)}{=} \mu \epsilon E_0 \hat{j} (\pm \omega) \sin(kx \mp \omega t),$$

som medfører at $B_y = 0$, dvs. \vec{B} kan kun ha komponent i z -retning med

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mp \mu \epsilon E_0 \omega \sin(kx \mp \omega t), \quad (11)$$

$$B_z = \pm \mu \epsilon \frac{\omega}{k} E_0 \cos(kx \mp \omega t). \quad (12)$$

Altså er

$$\underline{\vec{B}(x, t) = B_0 \hat{k} \cos(kx \mp \omega t)}, \quad \text{der } B_0 = \pm \mu \epsilon \frac{\omega}{k} E_0 = \pm \frac{1}{c^2} c E_0 = \pm \frac{E_0}{c}.$$

Det er altså et bestemt forhold mellom amplitydene E_0 og B_0 , avhengig av bølgefarten c .

Hvis vi istedenfor \vec{E} planpolarisert i y -retning valgte \vec{E} planpolarisert i z -retning, ville vi finne tilsvarende

$$\underline{\vec{E}(x, t) = E_0 \hat{k} \cos(kx \mp \omega t)} \quad \underline{\vec{B}(x, t) = -B_0 \hat{j} \cos(kx \mp \omega t)},$$

også her med

$$B_0 = \pm \frac{E_0}{c}.$$

For upolarisert bølge vil vi ha litt av hver planpolarisert bølge, og kan settes sammen med superposisjonsprinsippet. Merk at for alle polarisasjonstilfeller vil bølgens gangretning være i same retning som $\vec{E} \times \vec{B}$, og dette gjelder for alle emb. Se figurer/skisser i kopi av powerpoint-slides.