

Øving 6

Dipol. Platekondensatorer.

Oppgave 1. Potensial rundt dipol.

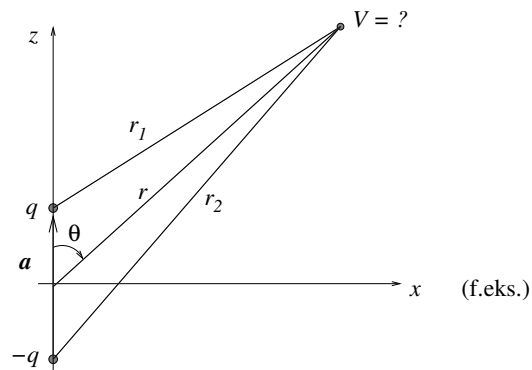
I en tidligere øving betraktet vi en elektrisk dipol, bestående av to punktladninger $\pm q$ lokalisert på z -aksen i $z = \pm a/2$. Vi regnet ut det eksakte potensialet $V_e(x, z)$ og fant

$$V_e(x, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a/2)^2}} \right).$$

Deretter viste vi at potensialet i stor avstand fra dipolen ($r \gg a$) blir tilnærmet lik (indeks a for "approximately")

$$V_a(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2}.$$

Her er r avstanden fra origo, dvs dipolens midtpunkt, og θ er vinkelen mellom z -aksen og \vec{r} . (Dipolmomentet er $p = qa$.)



Du skal visualisere dipolpotensialet og sammenligne det tilnærmede uttrykket V_a med det eksakte uttrykket V_e . Gjør dette ved å skrive et program i Python (evt. MatLab eller Octave) som regner ut differansen – eller kanskje like gjerne det prosentvise avviket $\Delta = 100 \cdot |(V_e - V_a)/V_e|$ mellom det eksakte og det tilnærmede uttrykket gitt ovenfor – og som plottet $V_e(x, z)$, $V_a(x, z)$ og "feilen" $\Delta(x, z)$ i tre forskjellige figurer.

NOEN TIPS OG KOMMENTARER:

- Skriv først om $V_a(r, \theta)$ (i kulekoordinater) til $V_a(x, z)$ (kartesiske koordinater).
- Det er mulig å plote potensialene i SI-enhet (V) som funksjon av x og z i en passende enhet. Men det er generelt mye mer praktisk å plote dimensjonsløse størrelser som funksjon av dimensjonsløse koordinater.

Uttrykkene inneholder lengdeskalaen a , slik at det er naturlig å innføre de dimensjonsløse koordinater

$$\xi = x/a, \quad \eta = z/a.$$

Uttrykkene inneholder også ladningen q og $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, slik at det er naturlig å bruke potensial relativt til potensialet $V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$ = potensial i avstand a fra en punktladning q . De dimensjonsløse potensial blir da

$$v_e = \frac{V_e}{V_0} = V_e \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 a}{q}, \quad v_a = \frac{V_a}{V_0} = V_a \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 a}{q}.$$

Dette gir de dimensjonsløse uttrykk $v_e(\xi, \eta)$ og $v_a(\xi, \eta)$. Finn disse.

- Definer et fornuftig område i (x, z) -planet for plottene dine, f.eks. $-2 < \xi < 2$ og $-2 < \eta < 2$.
- Det kan være lurt å begrense også "funksjonsaksen" i plottene dine, da potensialet blåser opp i nærheten av ladningene.
- Noen kommandoer og funksjoner som du kan få bruk for (Python):
`arange`, `meshgrid`, `fig.add_subplot`, `ax.plot_surface`, `ax.set_zlim`, `ax.set_xlabel`, `show`.

Oppgave 2. Sjekk av $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.

Vi har i mange eksempler i forelesning (og i Y&F) funnet E -feltet til ulike ladningskonstellasjoner. Vi har også funnet potensialet V til de samme ladningskonstellasjoner. I de følgende er potensialet V oppgitt (fra Kap. 23). Beregn elektrisk felt fra $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ og se om det stemmer med hva funnet i Kap. 21 eller Kap. 22. Du må i hvert tilfelle bruke et passende uttrykk for gradienten $\vec{\nabla}$ fra formelarkets siste side. I det følgende refererer Eks. x til eksempel i forelesning.

a) På akse (midtnormalen) til ring med radius a og uniformt ladd Q . (Kap. 21 - Eks. 4 og Kap. 23 - Eks. 7)

$$V(x) = kQ \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

b) Inni kule med radius R og homogen romladning $Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$. (Kap. 22 - Eks. 1 og Kap. 23 - Eks. 6)

$$V(r) = \frac{kQ}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

c) Rundt rett, uendelig lang linjeladning λ . (Kap. 22 - Eks. 5 og Kap. 23 - Eks. 9)

$$V(r) - V(r_b) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r}.$$

d) I stor avstand fra dipol $\vec{p} = q\vec{a}$ (Oppgave 1 i denne øvingen)

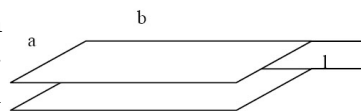
$$V_a(r, \theta) = k \frac{p \cos \theta}{r^2}.$$

\vec{E} har r og θ -komponent: $\vec{E}(r, \theta) = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}$, så du må bruke gradientoperator med θ -avhengighet.

e) For dipolen i pkt d), diskuter om uttrykkene er fornuftige for $\theta = 0$ og for $\theta = \pi/2$. Svaret for den siste har du i Øving 2 opg. 1. Hva med $r = 0$?

Oppgave 3. Platekondensator.

En parallelplatekondensator består av to rektangulære plater med sidekanter $a = 10,0$ cm og $b = 50$ cm. Avstanden mellom platene, ℓ , kan varieres, og er i starten $\ell = \ell_1 = 3,0$ mm og det er da luft mellom platene. Kondensatoren lades opp til en spenning $V_1 = 300$ V. Vi antar at ladningen er uniformt fordelt på innsiden av platene og at vi kan se bort fra endeeffekter.



- Hva er den elektriske feltstyrken E mellom kondensatorplatene?
- Hva er den elektriske feltstyrken utenfor (over og under) kondensatorplatene? Begrunn svaret!
- Hva er kondensatorens kapasitans C ?

Forbindelsen til spenningskilden brytes etter at kondensatoren er ladd. Avstanden mellom kondensatorplatene økes til $\ell = \ell_2 = 6,0$ mm for akkurat å gi plass til en plate av dielektrisk materiale av samme tykkelse. Det dielektriske materialet fyller hele hulrommet mellom kondensatorplatene. Spenningen på kondensatoren måles nå til $1/10$ (10%) av den opprinnelige spenningen.

d) Bestem relativ permittivitet (dielektrisitetetskonstant) ϵ_r for materialet som settes inn i platekondensatoren.

Tips: Ladningen kan ikke endres når spenningskilden er frakopla.

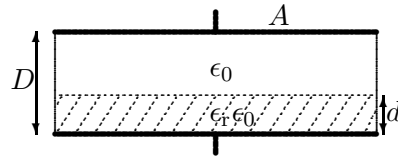
Oppgave 4. Seriekopling av kondensatorer.

a) Utled uttrykket for resultantkapasitansen C når to kondensatorer (med kapasitans C_1 og C_2) koples i serie.

b) En dielektrisk plate med tykkelse d og relativ permittivitet ϵ_r puttes inn i en parallellplatekondensator med plateavstand D ($d < D$). Arealet av alle plater er A og plateavstandene er små i forhold til arealet. Hva blir kapasitansen til den nye kondensatoren?

Tips: Seriekopling.

c) Vi måler kapasitansen for den nye kondensatoren til å være 125 pF. Hva er den relative permittiviteten ϵ_r til plata når $A = 300 \text{ cm}^2$, $d = 1,25 \text{ mm}$ og $D = 3,00 \text{ mm}$?



Utvalgte fasitsvar:

3c) 0,15 nF, 3d) 20; 4c) 3,34.