

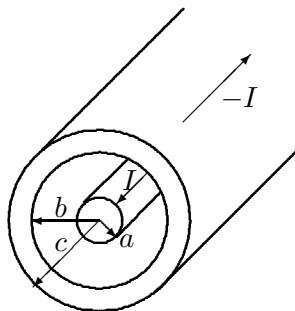
# Øving 13

## Induksjon. Forskyvningsstrøm. Vekselstrømskretser.

*Veiledning:* To. 14. og fre. 15. april ifølge nettsider.

*Innlevering:* Mandag 18. april kl. 14:00

### Oppgave 1. Induktans for koaksialkabel.



Vi ser på samme koaksialkabel (med strøm  $I$  og  $-I$ ) som i oppgave 3 i øving 11. Både ledermaterialet og isolasjonsmaterialet mellom lederne har permeabilitet  $\mu_0$ .

Vi skal beregne selvinduktansen til koaksialkabelen. Dette kan gjøres på to måter:

A) Fra beregning av asimutal (sirkulær) fluks  $\Phi_B$  mellom lederne og bruk av Faradays lov  $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt = -L \cdot dI/dt$ .

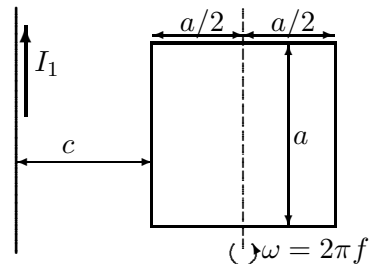
B) Fra beregning av energiinnhold mellom lederne og formelen  $U' = \frac{1}{2}L'I^2$ , der  $U'$  er magnetisk energiinnhold og  $L'$  er selvinduktans, begge per lengdeenhet av kabelen (' betyr per lengdeenhet). Magnetisk energitetthet (per volumenhet) er  $u = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$ .

Det kan bli litt arbeid å beregne fluks og/eller energi *innvendig* i lederne, og du kan derfor forenkle ved å anta at all strøm går på overflata av innerleder og innerflate av ytterleder. (Så er tilfelle for vekselstrøm med høy frekvens.)

- Skissér magnetfeltet  $B(r)$  som funksjon av avstand  $r$  fra aksene.
- Bruk metode A) til å vise at selvinduktans per lengdeenhet kan uttrykkes  $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln \frac{b}{a}$  (må løse et flateintegral).
- Hva er selvinduktansen  $L$  for en 10 m lang kabel med  $a = 0,50$  mm og  $b = 3,0$  mm?
- Finn uttrykk for den magnetiske energitettheten  $u = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$  som funksjon av avstand  $r$  fra aksene. Bruk deretter metode B) til å finne  $L'$  (må løse et volumintegral).
- For kabelen gitt i c), anta  $I = 2,0$  A og beregn  $u$  numerisk ved  $r = b$ . Merk deg enheten! Dette vil være lik et (magnetisk) trykk som ytterlederen presses utover med.

### Oppgave 2. Induksjon ved rotasjon.

Gitt en uendelig lang, rett leder som fører strømmen  $I_1$ . En kvadratisk, tynn ledersløyfe med sidekant  $a$  plasseres med venstre sidekant i avstand  $c$  fra den rette lederen (se figur). Sløyfa ligger i et plan gjennom den rette lederen og ligger så langt fra lederen ( $c \gg a$ ) slik at vi kan anta at magnetfeltet som  $I_1$  setter opp inni strømsløyfa er homogent og lik verdien i sentrum. Sløyfa roterer om en akse som går parallelt med  $I_1$  og gjennom midtpunktet av sløyfa, som vist i figuren. Rotasjonsfrekvensen er  $f$ .



Finn uttrykk for induisert elektromotorisk spenning i ledersløyfa. Sett inn tallsvar med oppgitte tallverdier:

$a = 0,100$  m,  $c = 1,00$  m,  $I_1 = 50$  A,  $f = 1,00$  kHz.

### Oppgave 3. Forskyvningsstrøm.

En parallellplatekondensator har plateareal  $A = 3,00 \text{ cm}^2$  i en avstand  $d = 2,50 \text{ mm}$ . Området mellom platene er fylt av et dielektrikum med  $\epsilon_r = 4,70$ . Se bort fra randeffekter.

a) Ved et bestemt tidspunkt er potensialforskjellen mellom platene  $120 \text{ V}$  og ledningsstrømmen  $I_c = 6,00 \text{ mA}$ . På dette tidspunktet, hva er (i) ladningen på hver plate, (ii) ladningsendring per tidsenhet, (iii) forskyvningsstrømmen  $I_d$  i dielektrikumet?

b) Anta nå at dielektrikumet i kondensatoren ikke er en perfekt isolator men har endelig resistivitet  $\rho$ . Kondensatoren har ved  $t = 0$  ladningen  $Q_0$  funnet over og tilførselsledninger koples da fra. Ladningen lekker så gradvis ved ledning gjennom dielektrikumet.

(i) Finn friladningsstrømtettheten  $J_c(t)$  i dielektrikumet som funksjon av tida (ikke sett inn tallverdier).

(ii) Finn forskyvningsstrømtettheten  $J_d(t)$  i dielektrikumet som funksjon av tida.

(iii) Vis at  $J_d = -J_c$ , dvs. at total strømtetthet er lik null. Kommentarer?

TIPS: Bruk Ohms lov på punktform:  $J_c = E/\rho$  og finn diff.likning for  $Q(t)$ .

### Oppgave 4. Kompleks impedans.

a) Skriv påtrykt spenning  $V$  og resulterende strøm  $I$  på kompleks form,

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}, \quad I(t) = I_0 e^{i\omega t} = |I_0| e^{i\omega t + i\beta},$$

og bruk Kirchhoffs spenningsregel til å vise at kompleks impedans til en motstand  $R$ , en induktans  $L$  og en kapasitans  $C$  (figuren) er hhv.

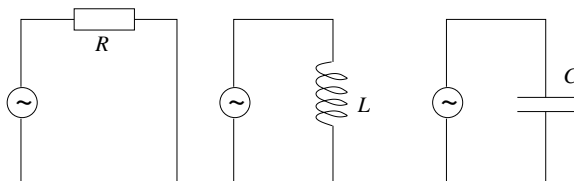
$$Z_R = R \quad Z_L = i\omega L \quad Z_C = 1/i\omega C$$

(Merk: Standard notasjon er at  $1/i\omega C$  betyr  $1/(i\omega C)$  og ikke  $(1/i) \cdot \omega C$ .)

b) Anta at i påtrykt spenning  $V_0 e^{i\omega t}$  er  $V_0$  reell og frekvensen  $\omega$  konstant. Skisser  $V(t) = V_0 \cos \omega t$  mellom  $t = 0$  og  $t = T = 2\pi/\omega$ . Velg f.eks.  $V_0 = 1,0 \text{ V}$ . Tegn i samme graf strømmen

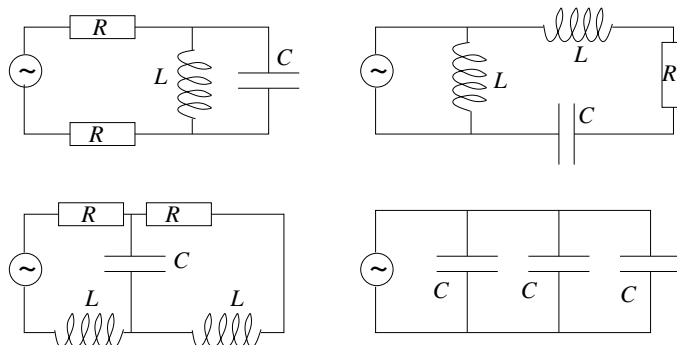
$$I(t) = |I_0| \cos(\omega t + \beta)$$

for hver av de tre kretsene til høyre. Bruk samme verdi for  $|I_0|$  i alle tre tilfeller, dvs. velg f.eks.  $|Z| = 0,50 \Omega$  for alle.

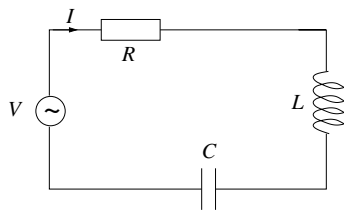


c) Figuren viser fire ulike AC-kretser.

Bruk reglene for serie- og parallellkobling av komplekse impedanser til å skrive ned den totale komplekse impedansen til hver av kretsene i figuren.



**Oppgave 5.**  
**Resonanskrets.**



Figuren viser en resonanskrets, i form av en seriekobling av  $R$ ,  $C$  og  $L$ . Det er resonans i kretsen ved den frekvensen der strømamplituden er maksimal, dvs.  $|Z|$  er minimum.

a) Bruk regelen for seriekobling av komplekse impedanser til å skrive ned den komplekse impedansen  $Z$  til denne kretsen. Finn uttrykk for impedansens absoluttverdi  $|Z|$  og fasevinkel  $\alpha$ .

b) Hva er kretsens resonansfrekvens? Finn tallverdi når impedansverdiene er  $L = \frac{1}{100\pi}$  H og  $C = \frac{1}{100\pi}$  F.

c) Påtrykt spenning og resulterende strøm er som angitt i oppgavene over med spenningsamplitude  $V_0 = 330$  V og impedansverdiene som gitt i b). Tegn opp strømamplituden  $|I_0(\omega)|$  som funksjon av vinkelfrekvensen  $\omega$  til spenningskilden for tre ulike verdier av resistansen:  $R = 1/100 \Omega$ ,  $R = 1/10 \Omega$  og  $R = 1,00 \Omega$ .

d) Kontaktene i veggen der du bor tilsvarer en spenningskilde med amplitude omtrent 330 V og frekvens  $f = 50$  Hz. Ville det ha vært smart å koble en slik  $RCL$ -krets med angitte verdier for  $R$ ,  $C$  og  $L$  til husets nettspenning? Hvor stor resistans bør du bruke for å unngå at sikringen ryker? Anta at det er snakk om en "kurs" med en 10-ampere sikring. Det betyr at strømamplitudens såkalte "rms-verdi"  $|I_0|/\sqrt{2}$  ikke må overskride 10 A.

Denne siste øvingen inneholder ganske mye, for å få dekket opp siste del av pensum. Den godkjennes hvis du har utført minst tre av de fem oppgavene, men det lønner seg å gjøre alle før eksamen. Husk at du må ha 8 av 13 øvinger godkjent for å gå opp til eksamen.

På neste side er det også en del frivillige flervalgsoppgaver, nyttig trening til eksamen.

Lykke til med eksamenslesing, eksamen og videre studier!

---

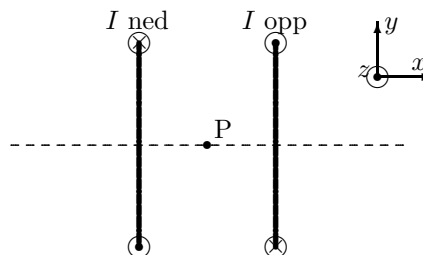
Utvalgte fasitsvar:

1c)  $3,6 \mu\text{H}$ ; 1e)  $7,1 \text{ mPa}$ . 2)  $\mathcal{E}_0 = 0,60 \text{ mV}$ . 3a)  $599 \text{ pC}$ . 5a)  $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$   
5b)  $50 \text{ Hz}$ , 5d)  $24 \Omega$ .

### Oppgave 6. Frivillige flervalgsoppgaver.

(Eksamen vil bestå av 20-25 flervalgsoppgaver som teller 50 % av eksamen.)

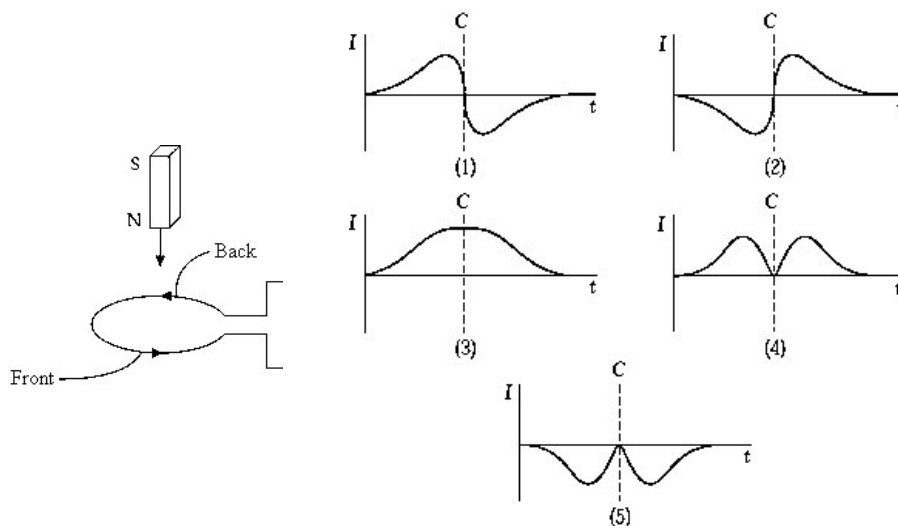
a) To like sirkulære strømsløyfer har sammenfallende senterakser og fører samme strømmen  $I$ , men i motsatt retning. Figuren viser sløyfene sett fra siden med senteraksen i papirplanet. Hva er retningen på magnetisk feltet  $\vec{B}$  i punktet P som ligger nøyaktig midt mellom sløyfene, på senteraksen.



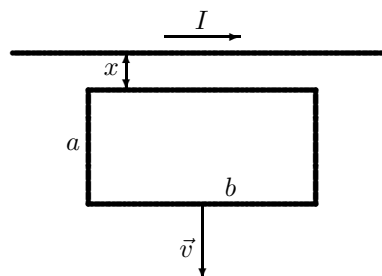
- A) positiv  $x$ -retning
- B) negativ  $x$ -retning
- C) positiv  $z$ -retning
- D) positiv  $y$ -retning
- E) villedende spørsmål, krafta er null

b) En stavmagnet slippes gjennom ei strømsløyfe som vist i venstre del av figuren under. Pilene i sløyfa viser valgt positiv strømretning. Husk at magnetiske feltlinjer går ut fra nordpol og inn mot sørpole på en magnet. Strømmen  $I$  som funksjon av tida  $t$  når magneten faller gjennom sløyfa er illustrert kvalitativt med hvilken graf? (Tidspunktet som midtpunktet av magneten passerer sløyfa er vist med linja C.)

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5



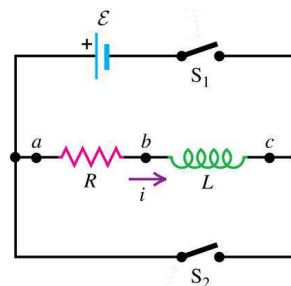
c) En rektangulær sløyfe med sidekanter  $a$  og  $b$  beveger seg bort fra en lang rett strømførende leder som vist på figuren der sløyfa og den rette lederen ligger i papirplanet. Den rette lederen fører en strøm  $I$  mot høyre og avstanden mellom lederen og den nærmeste sidekanten av sløyfa er  $x$  og øker med konstant hastighet  $v = dx/dt$ . En strøm induseres i den rektangulære sløyfa, og strømmen



- A) går mot klokka og er proporsjonal med  $I^2$
- B) går med klokka og er proporsjonal med  $I^2$
- C) går mot klokka og er proporsjonal med  $I$
- D) går med klokka og er proporsjonal med  $I$
- E) går mot klokka og er uavhengig av  $I$ .

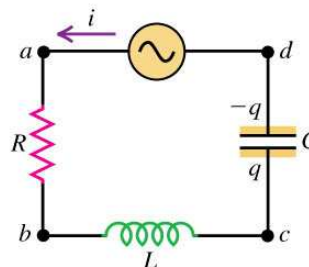
d) En induktor  $L$  og en motstand  $R$  er forbundet til en spenningskilde  $\mathcal{E}$  som vist i figuren. Bryteren  $S_1$  lukkes og forblir lukket slik at konstant strøm går gjennom  $L$  og  $R$ . Så åpnes bryter  $S_1$  samtidig som bryter  $S_2$  lukkes. Etter dette vil  $|di(t)/dt|$  (absoluttverdien av tidsraten for strømmen)

- A) forbli konstant
- B) øke med tida
- C) avta med tida
- D) ikke nok informasjon til å avgjøre
- E) øke først for så å avta.



e) Kretsen i figuren består av en vekselspenningskilde (AC) og en seriekopling av en resistor, induktans og en kondensator med endelige verdier. Kretsstrømmen (angitt med  $i$ ) har en veldig liten amplitude når kilden har en veldig høy frekvens  $\omega$ . Hvilket kretselement er årsak til dette?

- A) Resistansen  $R$
- B) Induktansen  $L$
- C) Kapasitansen  $C$
- D) En kombinasjon av  $L$  og  $C$
- E) Villedende spørsmål - strømmen har en stadig stigende amplitude når frekvensen er veldig høy.



f) En elektromagnetisk bølge som har bølgelengde 300 m i luft har en frekvens lik

- A)  $1,0 \cdot 10^{-6}$  Hz
- B) 1,1 Hz
- C)  $1,0 \cdot 10^6$  Hz
- D)  $9 \cdot 10^6$  Hz
- E)  $1,0 \cdot 10^{11}$  Hz

g) En harmonisk elektromagnetisk bølge i vakuum forplanter seg i positiv  $z$ -retning. På et visst punkt og til en viss tid peker det elektriske feltet i negativ  $x$ -retning. Da peker det magnetiske feltet  $\vec{B}$  i

- A) positiv  $y$ -retning
- B) negativ  $y$ -retning
- C) positiv  $z$ -retning
- D) negativ  $z$ -retning
- E) ingen av disse retningene.

h) En harmonisk elektromagnetisk bølge i vakuum har et elektrisk felt med komponent bare i  $x$ -retning, og komponenten er  $E_x = E_0 \cos(ky + \omega t)$ . Magnetisk feltvektor for denne bølgen

- A) har kun  $x$ -komponent
- B) har kun  $y$ -komponent
- C) har kun  $z$ -komponent
- D) har en  $y$  og en  $z$ -komponent
- E) ingen av disse.