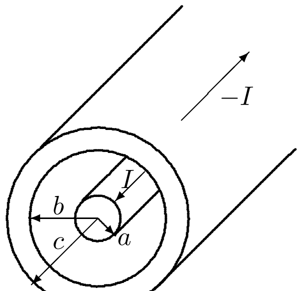
TFY4155/FY1003 Elektr. & magnetisme

Øving 13

Induksjon. Forskyvningsstrøm. Vekselstrømskretser.

Veiledning: To. 14. og fre. 15. april ifølge nettsider.
Innlevering: Mandag 18. april kl. 14:00

Oppgave 1. Induktans for koaksialkabel.



Vi ser på samme koaksialkabel (med strøm I og $-I$) som i oppgave 3 i øving 11. Både ledermaterialet og isolasjonsmaterialet mellom lederne har permeabilitet μ_0.

Vi skal beregne selvinduktansen til koaksialkabelen. Dette kan gjøres på to måter:

A) Fra beregning av asimutal (sirkulær) fluks Φ_B mellom lederne og bruk av Faradays lov $\mathcal{E} = -\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t = -L \cdot \mathrm{d}I/\mathrm{d}t$.

B) Fra beregning av energiinnhold mellom lederne og formelen $U' = \frac{1}{2}L'I^2$, der U' er magnetisk energiinnhold og L' er selvinduktans, begge per lengdeenhet av kabelen ($'$ betyr per lengdeenhet). Magnetisk energitetthet (per volumenhet) er $u = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$.

Det kan bli litt arbeid å beregne fluks og/eller energi *innvendig* i lederne, og du kan derfor forenkle ved å anta at all strøm går på overflata av innerleder og innerflate av ytterleder. (Så er tilfelle for vekselstrøm med høy frekvens.)

a) Skissér magnetfeltet $B(r)$ som funksjon av avstand r fra aksen.

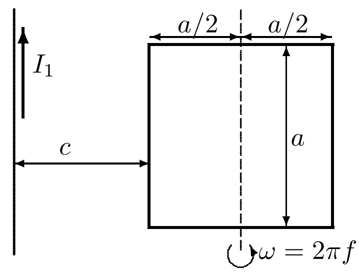
b) Bruk metode A) til å vise at selvinduktans per lengdeenhet kan uttrykkes $L' = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln \dfrac{b}{a}$ (må løse et flateintegral).

c) Hva er selvinduktansen L for en 10 m lang kabel med $a = 0,50$ mm og $b = 3,0$ mm?

d) Finn uttrykk for den magnetiske energitettheten $u = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$ som funksjon av avstand r fra aksen. Bruk deretter metode B) til å finne L' (må løse et volumintegral).

e) For kabelen gitt i c), anta $I = 2,0$ A og beregn u numerisk ved $r = b$. Merk deg enheten! Dette vil være lik et (magnetisk) trykk som ytterlederen presses utover med.

Oppgave 2. Induksjon ved rotasjon.



Gitt en uendelig lang, rett leder som fører strømmen I_1. En kvadratisk, tynn ledersløyfe med sidekant a plasseres med venstre sidekant i avstand c fra den rette lederen (se figur). Sløyfa ligger i et plan gjennom den rette lederen og ligger så langt fra lederen ($c \gg a$) slik at vi kan anta at magnetfeltet som I_1 setter opp inni strømsløyfa er homogent og lik verdien i sentrum. Sløyfa roterer om en akse som går parallelt med I_1 og gjennom midtpunktet av sløyfa, som vist i figuren. Rotasjonsfrekvensen er f.

Finn uttrykk for indusert elektromotorisk spenning i ledersløyfa. Sett inn tallsvar med oppgitte tallverdier:
$a = 0{,}100$ m, $c = 1{,}00$ m, $I_1 = 50$ A, $f = 1{,}00$ kHz.

Oppgave 3. Forskyvningsstrøm.

En parallellplatekondensator har plateareal $A = 3,00\,\mathrm{cm}^2$ i en avstand $d = 2,50$ mm. Området mellom platene er fylt av et dielektrikum med $\epsilon_\mathrm{r} = 4,70$. Se bort fra randeffekter.

a) Ved et bestemt tidspunkt er potensialforskjellen mellom platene 120 V og ledningsstrømmen $I_\mathrm{c} = 6,00$ mA. På dette tidspunktet, hva er (i) ladningen på hver plate, (ii) ladningsendring per tidsenhet, (iii) forskyvningsstrømmen I_d i dielektrikumet?

b) Anta nå at dielektrikumet i kondensatoren ikke er en perfekt isolator men har endelig resistivitet ρ. Kondensatoren har ved $t = 0$ ladningen Q_0 funnet over og tilførselsledninger koples da fra. Ladningen lekker så gradvis ved ledning gjennom dielektrikumet.

(i) Finn friladningsstrømtettheten $J_\mathrm{c}(t)$ i dielektrikumet som funksjon av tida (ikke sett inn tallverdier).
(ii) Finn forskyvningsstrømtettheten $J_\mathrm{d}(t)$ i dielektrikumet som funksjon av tida.
(iii) Vis at $J_\mathrm{d} = -J_\mathrm{c}$, dvs. at total strømtetthet er lik null. Kommentarer?
TIPS: Bruk Ohms lov på punktform: $J_\mathrm{c} = E/\rho$ og finn diff.likning for $Q(t)$.

Oppgave 4. Kompleks impedans.

a) Skriv påtrykt spenning V og resulterende strøm I på kompleks form,

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}, \quad I(t) = I_0 e^{i\omega t} = |I_0| e^{i\omega t + i\beta},$$

og bruk Kirchhoffs spenningsregel til å vise at kompleks impedans til en motstand R, en induktans L og en kapasitans C (figuren) er hhv.

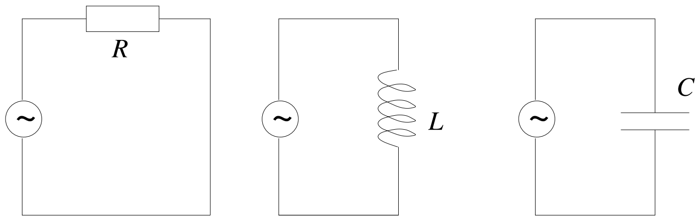
$$Z_R = R \qquad Z_L = i\omega L \qquad Z_C = 1/i\omega C$$

(Merk: Standard notasjon er at $1/i\omega C$ betyr $1/(i\omega C)$ og ikke $(1/i) \cdot \omega C$.)

b) Anta at i påtrykt spenning $V_0 e^{i\omega t}$ er V_0 reell og frekvensen ω konstant. Skisser $V(t) = V_0 \cos \omega t$ mellom $t = 0$ og $t = T = 2\pi/\omega$. Velg f.eks. $V_0 = 1{,}0$ V. Tegn i samme graf strømmen

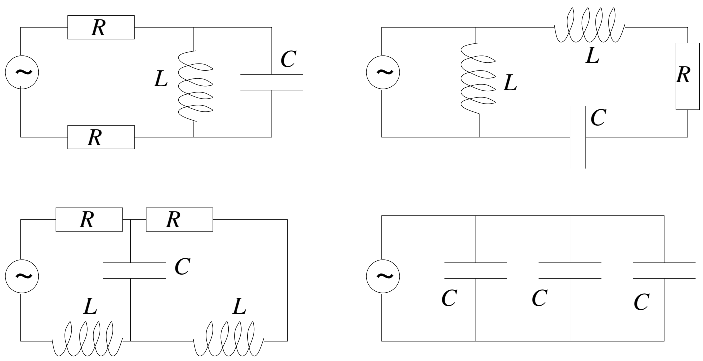
$$I(t) = |I_0| \cos(\omega t + \beta)$$

for hver av de tre kretsene til høyre. Bruk samme verdi for $|I_0|$ i alle tre tilfeller, dvs. velg f.eks. $|Z| = 0,50\,\Omega$ for alle.

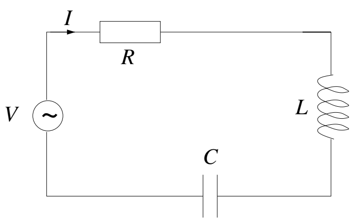


c) Figuren viser fire ulike AC-kretser.

Bruk reglene for serie- og parallellkobling av komplekse impedanser til å skrive ned den totale komplekse impedansen til hver av kretsene i figuren.



Oppgave 5. Resonanskrets.



Figuren viser en resonanskrets, i form av en seriekobling av R, C og L. Det er resonans i kretsen ved den frekvensen der strømamplituden er maksimal, dvs. $|Z|$ er minimum.

a) Bruk regelen for seriekobling av komplekse impedanser til å skrive ned den komplekse impedansen Z til denne kretsen. Finn uttrykk for impedansens absoluttverdi $|Z|$ og fasevinkel α.

b) Hva er kretsens resonansfrekvens? Finn tallverdi når impedansverdiene er $L = \frac{1}{100\pi}$ H og $C = \frac{1}{100\pi}$ F.

c) Påtrykt spenning og resulterende strøm er som angitt i oppgavene over med spenningsamplitude $V_0 = 330$ V og impedansverdiene som gitt i b). Tegn opp strømamplituden $|I_0(\omega)|$ som funksjon av vinkelfrekvensen ω til spenningskilden for tre ulike verdier av resistansen: $R = 1/100\,\Omega$, $R = 1/10\,\Omega$ og $R = 1,00\,\Omega$.

d) Kontaktene i veggen der du bor tilsvarer en spenningskilde med amplitude omtrent 330 V og frekvens $f = 50$ Hz. Ville det ha vært smart å koble en slik RCL-krets med angitte verdier for R, C og L til husets nettspenning? Hvor stor resistans bør du bruke for å unngå at sikringen ryker? Anta at det er snakk om en "kurs" med en 10-ampere sikring. Det betyr at strømamplitudens såkalte "rms-verdi" $|I_0|/\sqrt{2}$ ikke må overskride 10 A.

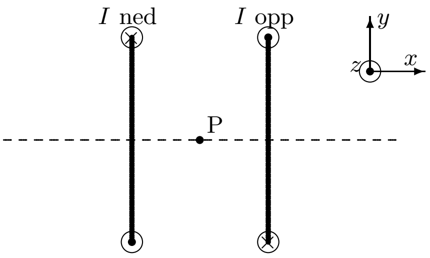
Denne siste øvingen innholder ganske mye, for å få dekket opp siste del av pensum. Den godkjennes hvis du har utført minst tre av de fem oppgavene, men det lønner seg å gjøre alle før eksamen. Husk at du må ha 8 av 13 øvinger godkjent for å gå opp til eksamen.
På neste side er det også en del frivillige flervalgsoppgaver, nyttig trening til eksamen.
Lykke til med eksamenslesing, eksamen og videre studier!

Utvalgte fasitsvar:

1c) 3,6 μH; 1e) 7,1 mPa. 2) $\mathcal{E}_0 = 0{,}60$ mV. 3a) 599 pC. 5a) $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ 5b) 50 Hz, 5d) 24 Ω.

Oppgave 6. Frivillige flervalgsoppgaver.
(Eksamen vil bestå av 20-25 flervalgsoppgaver som teller 50 % av eksamen.)

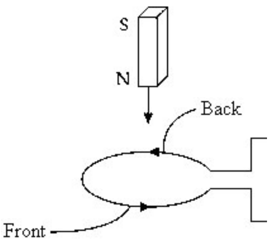
a) To like sirkulære strømsløyfer har sammenfallende senterakser og fører samme strømmen I, men i motsatt retning. Figuren viser sløyfene sett fra siden med senteraksen i papirplanet. Hva er retningen på magnetisk feltet $\vec{B}$ i punktet P som ligger nøyaktig midt mellom sløyfene, på senteraksen.

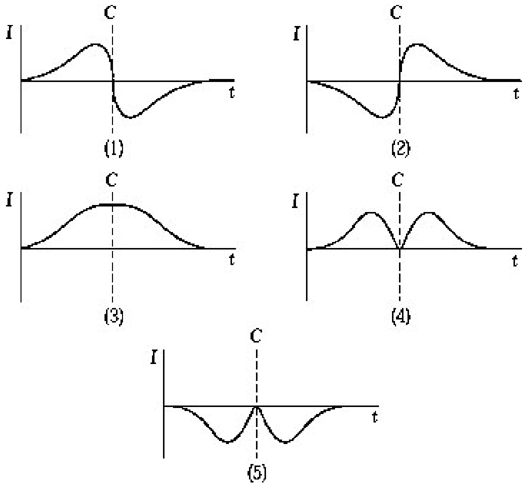


A) positiv x-retning
B) negativ x-retning
C) positiv z-retning
D) positiv y-retning
E) villedende spørsmål, krafta er null

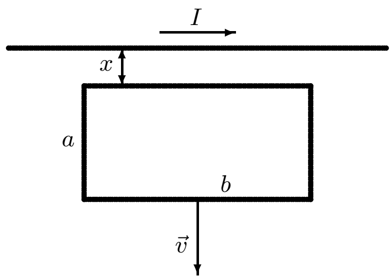
b) En stavmagnet slippes gjennom ei strømsløyfe som vist i venstre del av figuren under. Pilene i sløyfa viser valgt positiv strømretning. Husk at magnetiske feltlinjer går ut fra nordpol og inn mot sørpol på en magnet. Strømmen I som funksjon av tida t når magneten faller gjennom sløyfa er illustrert kvalitativt med hvilken graf? (Tidspunktet som midtpunktet av magneten passerer sløyfa er vist med linja C.)

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



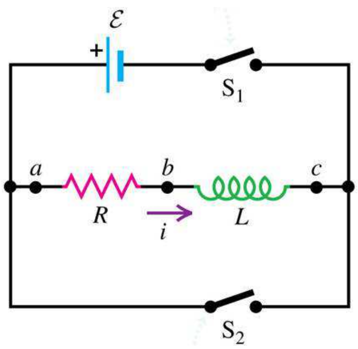


c) En rektangulær sløyfe med sidekanter a og b beveger seg bort fra en lang rett strømførende leder som vist på figuren der sløyfa og den rette lederen ligger i papirplanet. Den rette lederen fører en strøm I mot høyre og avstanden mellom lederen og den nærmeste sidekanten av sløyfa er x og øker med konstant hastighet $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. En strøm induseres i den rektangulære sløyfa, og strømmen



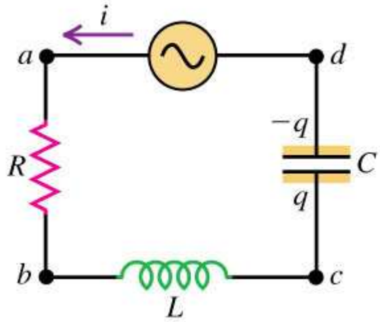
A) går mot klokka og er proporsjonal med I^2
B) går med klokka og er proporsjonal med I^2
C) går mot klokka og er proporsjonal med I
D) går med klokka og er proporsjonal med I
E) går mot klokka og er uavhengig av I.

d) En induktor L og en motstand R er forbundet til en spenningskilde $\mathcal{E}$ som vist i figuren. Bryteren S_1 lukkes og forblir lukket slik at konstant strøm går gjennom L og R. Så åpnes bryter S_1 samtidig som bryter S_2 lukkes. Etter dette vil $|\mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t|$ (absoluttverdien av *tidsraten* for strømmen)



A) forbli konstant
B) øke med tida
C) avta med tida
D) ikke nok informasjon til å avgjøre
E) øke først for så å avta.

e) Kretsen i figuren består av en vekselspenningskilde (AC) og en seriekopling av en resistor, induktans og en kondensator med endelige verdier. Kretsstrømmen (angitt med i) har en veldig liten amplitude når kilden har en veldig høy frekvens ω. Hvilket kretselement er årsak til dette?



A) Resistansen R
B) Induktansen L
C) Kapasitansen C
D) En kombinasjon av L og C
E) Villedende spørsmål - strømmen har en stadig stigende amplitude når frekvensen er veldig høy.

f) En elektromagnetisk bølge som har bølgelengde 300 m i luft har en frekvens lik
A) $1,0 \cdot 10^{-6}$ Hz
B) $1,1$ Hz
C) $1,0 \cdot 10^{6}$ Hz
D) $9 \cdot 10^{6}$ Hz
E) $1,0 \cdot 10^{11}$ Hz

g) En harmonisk elektromagnetisk bølge i vakuum forplanter seg i positiv z-retning. På et visst punkt og til en viss tid peker det elektriske feltet i negativ x-retning. Da peker det magnetiske feltet $\vec{B}$ i

A) positiv y-retning
B) negativ y-retning
C) positiv z-retning
D) negativ z-retning
E) ingen av disse retningene.

h) En harmonisk elektromagnetisk bølge i vakuum har et elektrisk felt med komponent bare i x-retning, og komponenten er $E_x = E_0 \cos(ky + \omega t)$. Magnetisk feltvektor for denne bølgen

A) har kun x-komponent
B) har kun y-komponent
C) har kun z-komponent
D) har en y og en z-komponent
E) ingen av disse.